Департамент образования и науки Кемеровской области
Государственное учреждение
«Областной центр мониторинга качества образования»

# ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН 2012

# МАТЕМАТИКА

## СБОРНИК АНАЛИТИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ

Кемерово 2012

*Автор:*

**В.В. Рагулин**, кандидат физико-математических наук, заместитель декана математического факультета ФГБОУ ВПО «Кемеровский государственный университет», председатель предметной комиссии по математике государственной экзаменационной комиссии Кемеровской области.

Сборник аналитических материалов составлен по итогам единого государственного экзамена по математике в Кемеровской области в 2012 году. В данном сборнике представлен анализ результатов ЕГЭ по математике на этапе государственной (итоговой) аттестации выпускников XI (XII) классов в Кемеровской области и в целом по Российской Федерации, анализ решаемости экзаменационных заданий по содержательным линиям. Приводятся рекомендации для педагогов по подготовке обучающихся к ЕГЭ.

Данный материал предназначен для руководителей и специалистов муниципальных органов управления образованием, муниципальных методических служб, руководителей и педагогических работников образовательных учреждений.

**Единый государственный экзамен:** Математика: сборник аналитических материалов. – Кемерово: ГУ ОЦМКО, 2012. – 55 с.

# СОДЕРЖАНИЕ


| | |
|---|---|
| Краткая характеристика целей и содержания КИМ ЕГЭ 2012 года | 4 |
| Основные результаты экзамена 2012 года по математике | 10 |
| Детализация результатов ЕГЭ и качественная картина подготовленности выпускников по математике в 2012 году | 21 |
| Решение наиболее сложных задач одного из вариантов 2012 года | 45 |
| Общие выводы и некоторые рекомендации | 54 |

## 1. Краткая характеристика целей и содержания КИМ ЕГЭ 2012 года

ЕГЭ по математике является одним из двух обязательных экзаменов, который сдают все выпускники общеобразовательных учреждений, он призван оценить уровень сформированности у выпускников математических компетенций, предусмотренных требованиями Федерального компонента государственных образовательных стандартов основного общего и среднего (полного) общего образования по математике (от2004г.).

Контрольные измерительные материалы (далее КИМ) единого государственного экзамена по математике в 2012 году соответствуют целям ЕГЭ:

- подтверждение наличия у выпускника базовых математических компетенций (в случае достижения минимального количества баллов ЕГЭ - порогового балла);

- достаточно объективного ранжирование выпускников при поступлении в образовательные учреждения среднего специального или высшего профессионального образования.

Исходным источником информации о содержании и объеме материала, структуре и системе оценивания экзаменационной работы являются следующие документы:

- кодификатор элементов содержания по математике (КЭС) для составления контрольных измерительных материалов единого государственного экзамена 2012 г.;

- кодификатор требований к уровню подготовки выпускников по математике (КТ) для составления контрольных измерительных материалов единого государственного экзамена 2012 г.;

- спецификация контрольных измерительных материалов единого государственного экзамена 2012 г. по математике;

- демонстрационный вариант контрольных измерительных материалов для ЕГЭ 2012 года по математике.

Задания вариантов КИМ состоят из двух частей В и С, при этом часть В можно условно разделить на три группы: задания по алгебре, по геометрии, а также практико-ориентированные задачи, содержание которых предполагают применение знаний предмета в повседневных ситуациях и элементарных расчетах, например, при покупке товаров или услуг, оценку шансов в простейших вероятностных ситуациях и т.п.

Для участников экзамена, заинтересованных лишь в преодолении порогового балла (5 первичных или 24 тестовых) и получении аттестата о среднем (полном) общем образовании, предназначены задания В1–В13, которые направлены на:

- оценку уровня развития общекультурных и коммуникативных математических навыков, необходимых человеку в современном обществе;

- проверку адекватности восприятия практико-ориентированных задач, изложенных неформализованным текстовым способом;

- проверку базовых вычислительных и логических умений и навыков;

- оценку умения считывать и анализировать графическую и табличную информацию;

- оценку способности выпускников ориентироваться в простейших наглядных геометрических конструкциях;

- построение и анализ простейших математических моделей.

Для участников экзамена, планирующих поступление в ссузы и вузы на основании результатов ЕГЭ по математике , дополнительно разработаны задания В14, С1–С6, направленные на ранжирование абитуриентов по уровню математической подготовки. В указанных заданиях сделан акцент на:

- проверку владения алгебраическим аппаратом;

- проверку освоения базовых идей математического анализа;

- проверку умения логически грамотно излагать свои аргументы;

- оценку сформированности геометрических представлений, умения анализировать геометрическую конструкцию;

- проверку умения строить и исследовать математические модели;

- умение решать задачи повышенного и высокого уровней сложности, комбинируя различные изученные методы в незнакомых ситуациях.

Первая часть В КИМ ЕГЭ 2012 года по математике соответствовала заданиям Открытого банка математических задач. Доступ к заданиям Открытого банка был свободный (см. http://mathege.ru/or/ege/Main) . Главная задача открытого банка заданий ЕГЭ по математике — дать представление о том, какие задания будут в вариантах единого государственного экзамена по математике в 2012 году, и помочь выпускникам сориентироваться при подготовке к экзамену. Задания открытого банка призваны были помочь выпускникам повторить (освоить) школьный курс математики, найти в своих знаниях слабые места и ликвидировать их до экзамена. Задачи B1–B14 представлены заданиями, покрывающими все требования Федерального компонента образовательного стандарта, содержали все основные типы заданий базового уровня, содержащиеся в школьном курсе математики. Задания C1–C4 относились к повышенному уровню сложности, а задания C5, C6 – к высокому уровню сложности.

Правильный ответ каждого из заданий В1-В14 оценивался 1 баллом, при этом проверка производился компьютерной программой и результаты проверки не подлежали апелляции. Максимальные оценки за решения заданий части С варьировался от 2 до 4 баллов: полное правильное решение каждого из заданий С1 и С2 оценивалось 2 баллами, каждого из заданий С3 и С4 – 3 баллами, каждого из заданий С5 и С6 – 4 баллами.

Максимально возможный балл за всю работу – 32.

Таблица 1.

**Пороговый балл ЕГЭ, подтверждающий освоение выпускниками основной общеобразовательной программы по математике среднего (полного) общего образования 2007- 2012 годы**

| 2006 год | 2007 год | 2008 год | 2009 год | 2010 год | 2011 год | 2012 год |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 7 | 6 | 4 | 3 | 4 | 5 |

Из таблицы 1 видно, что требования к получению положительного результата повысились на 1 балл – 5 и более первичных баллов (при этом следует помнить, что в 2010 году существенно поменялась структура КИМ-ов).

Таблица 2.

**Шкала перевода первичных баллов в тестовые за 3 года**

| Первичный балл | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Тестовый балл 2010г. | 11 | 16 | 21 | 25 | 30 | 34 | 38 | 41 | 45 | 48 | 52 | 56 | 60 | 63 | 66 | 69 | 71 |
| Тестовый балл 2011г. | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 34 | 38 | 41 | 45 | 49 | 52 | 56 | 60 | 63 | 66 | 68 | 70 |
| Тестовый балл 2012г. | 5 | 10 | 15 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 | 40 | 44 | 48 | 52 | 56 | 60 | 63 | 66 | 68 |

| Первичный балл | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Тестовый балл 2010г. | 73 | 75 | 77 | 79 | 81 | 83 | 85 | 87 | 90 | 92 | 95 | 97 | 100 | | |
| Тестовый балл 2011г. | 73 | 75 | 77 | 80 | 82 | 84 | 87 | 89 | 91 | 94 | 96 | 98 | 100 | | |
| Тестовый балл 2012г. | 70 | 72 | 74 | 77 | 79 | 81 | 83 | 85 | 87 | 90 | 92 | 94 | 96 | 98 | 100 |

## Общий план КИМ по математике 2012 года

В КИМ-ах ЕГЭ по математике в 2012 г. соблюдена преемственность с КИМ-ами 2011 г. При этом имеются определенные качественные и количественные отличия, отраженные в спецификации и демоверсии:

1. в большинстве заданий базового уровня, при сохранении тематики и сложности, существенно расширен спектр заданий (до практически полного спектра заданий базового уровня, представленных в школьной практике);

2. расширен спектр заданий в позиции B2 «умение анализировать графическую информацию», за счет включения в нее заданий на чтение и анализ не только графиков, но и диаграмм;

3. завершено расширение до пропорционального уровня количества геометрических заданий базового уровня (в части 1 добавлена задача по стереометрии в позиции B9);

4. включено задание по теории вероятностей (в позиции B10);

5. несколько расширен, с сохранением тематики, круг задач C3: наряду с неравенствами, в вариантах могут присутствовать системы неравенств (алгебраических, дробно-рациональных, показательных, логарифмических);

6. оптимизировано в соответствии с данными о выполнении заданий в 2010 и 2011 гг. расположение заданий в варианте (от самых простых к самым сложным).

Таким образом, количество заданий в части 1 увеличилось до 14 (B1–B14). Количество и тематика заданий второй части осталось прежним – 6 заданий (C1–C6). Максимальный первичный балл за выполнение заданий части 1 – 14, заданий части 2 – 18, максимальный первичный балл за выполнение всей работы – 32.

На выполнение экзаменационной работы отводилось 240 мин.

В каждом из вариантов КИМ были представлены задания, направленные на проверку знаний участников ЕГЭ по всем основным содержательным блокам курса математики. В соответствии со структурой школьного курса математики (с учетом базового и профильного уровней обучения) и с указанными выше целями экзамена задания КИМ условно делятся на содержательные блоки (табл. 3 и 4.): алгебра-1 (базовый уровень), геометрия-1 (базовый уровень), начала математического анализа (базовый уровень), алгебра-2 (профильный уровень), геометрия-2 (профильный уровень). Отметим, что задания профильного уровня по началам анализа в ЕГЭ по математике в 2012 г. (как и в прошлые годы) не включались. Это связано с тенденцией снижения роли начал анализа в курсе математики в старшей школе, в том числе и в связи с запросами технических вузов, которые, скорее, нуждаются в качественном освоении выпускниками алгебры, и лишь качественном знакомстве с основными идеями анализа , поскольку изучение начал анализа заново начинается на 1-м курсе.

Таблица 3.

**Тематика части В**

| **Часть 1 (задания с кратким ответом)** | | |
|---|---|---|
| **Блок содержания** | **Номера заданий** | **Максимум первичных баллов** |
| Алгебра-1 | B5, B7, B13 | 3 |
| Геометрия-1 | B3, B6, B9, B11 | 4 |
| Практико-ориентированные задачи | B1, B2, B4, B10, B12 | 5 |
| Начала математического анализа | B8, B14 | 2 |

Таблица 4.

**Тематика части С**

| **Часть 2 (задания с развернутым ответом)** | | |
|---|---|---|
| **Блок содержания** | **Номера заданий** | **Максимум первичных баллов** |
| Алгебра-2 | C1, C3, C5, C6 | 13 |
| Геометрия-2 | C2, C4 | 5 |

Добавление в КИМ-ы двух относительно простых заданий сыграло с точки зрения экзаменующихся, скорее всего, положительную роль: для слабых участников экзамена расширился круг выбора доступных задач, для средних и сильных участников снизились «потери» от нерешенных сложных заданий, так как в результате упала их доля в тестовом исчислении.

## 2. Основные результаты экзамена 2012 года по математике

В 2012 году по области (и по России тоже) впервые за ряд лет увеличилось количество участников ЕГЭ по математике:

Таблица 5.

**Количество участников ЕГЭ по математике в Кемеровской области (по годам)**

| 2009 год | 2010 год | 2011 год | 2012 год |
|---|---|---|---|
| 17727 | 14403 | 10327 | 14174 |

В нижеследующей таблице приведены результаты ЕГЭ по математике по трем последним годам.

**Средние баллы ЕГЭ по математике (по годам)**

| 2010 год | | 2011 год | | 2012 год | |
|---|---|---|---|---|---|
| Россия | Кемеровская область | Россия | Кемеровская область | Россия | Кемеровская область |
| 44,2 | 39,25 | 48,2 | 45 | 44,6 | 43,1 |

Средние баллы по Кемеровской области ниже российских и в 2011 году средний балл по России вырос на 4 балла, а по Кемеровской области тоже вырос на 5,75 балла, в 2012 году средний бал по России снизился на 3,6 балла, а по Кемеровской области лишь на 1,5 балла . В 2010 году максимальный результат в 100 баллов показали 6 участников, в прошлом году 2, а в текущем 2012 году таковых нет вовсе. Распределение участников по количеству баллов значительно изменилось по сравнению с прошлым годом (см. сборник аналитических материалов по математике за 2011 год). Примерно в полтора раза увеличилось количество результатов с низкими баллами (от 24 до 49) и сократилось число результатов с высокими и средними баллами, доля не сдавших ЕГЭ примерно сохраняется:

2012 г.

| **0– 23 балла** | **24 – 49 баллов** | **50 – 69 баллов** | **70 – 100 баллов** |
|---|---|---|---|
| **Число (доля в %) выпускников, набравших соответствующий тестовый балл** | | | |
| 861 (6,1) | 8691(61,3) | 3928(27,7) | 694(4,9) |

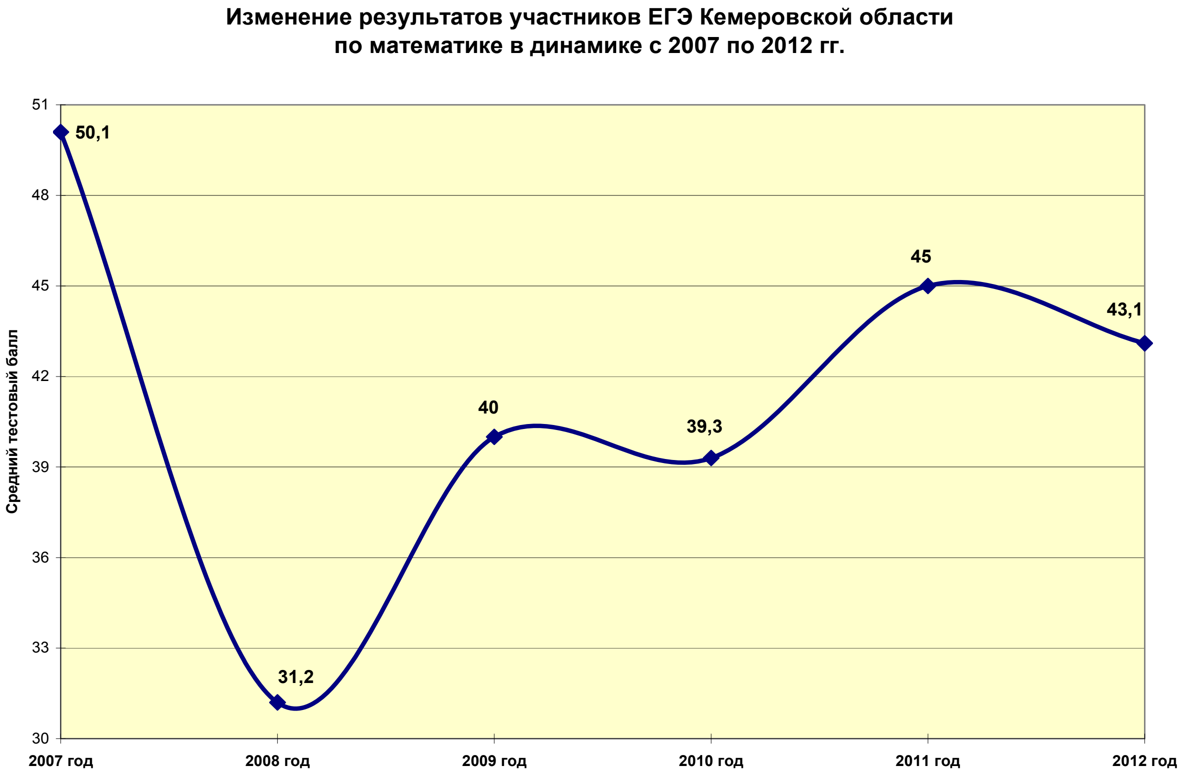
2011 г.

| **0– 23 балла** | **24 – 49 баллов** | **50 – 69 баллов** | **70 – 100 баллов** |
|---|---|---|---|
| **Число (доля в %) выпускников, набравших соответствующий тестовый балл** | | | |
| 652(6,3) | 5042(48,8) | 3943(38,2) | 688(6,6) |

2010 г.

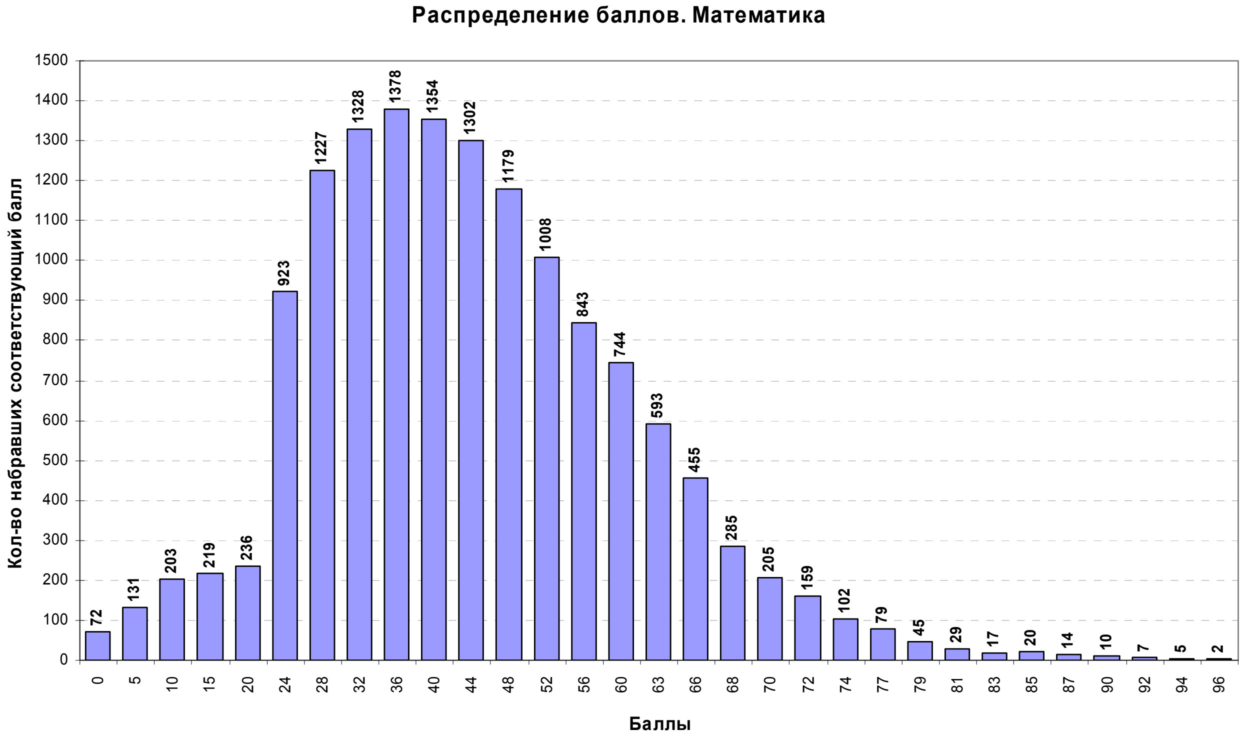
| **0– 20 балла** | **21 – 49 баллов** | **50 – 69 баллов** | **70 – 100 баллов** |
|---|---|---|---|
| **Число (доля в %) выпускников, набравших соответствующий тестовый балл** | | | |
| 836(5,80) | 10403(72,23) | 2693(18,70) | 471(3,27) |

Это значит, что качество подготовки выпускников по математике в среднем стало ниже, несмотря на то, что процент числа участников ЕГЭ, не преодолевших минимальный рубеж в 2012 году чуточку сократился и составил 6,1 % против 6,3 % в 2011 году. Динамика изменения числовых характеристик итогов ЕГЭ в графическом и табличном видах представлена в сборнике статистических материалов по ЕГЭ 2012, подготовленном ГУ «Областной центр мониторинга качества образования» Кемеровской области. Приведем лишь некоторые интересные материалы из этого сборника:

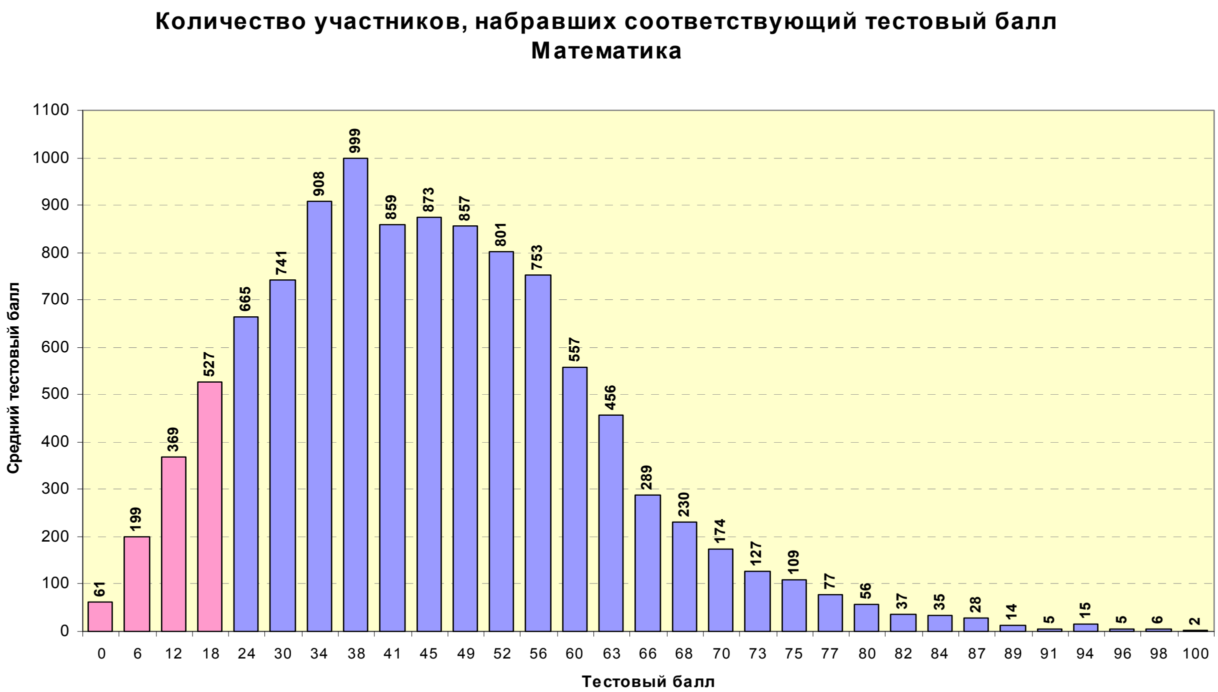



Анализируя графические представления распределений числа работ по баллам за последние 3 года, обнаружим, что в 2011 году результаты имели «более правильное» нормальное распределение, в 2012 и 2010 годах получились очень схожие «ущербные» распределения ( словно самые слабые экзаменующиеся в эти годы были совсем безнадежными: их мало в пограничной зоне порогового балла):

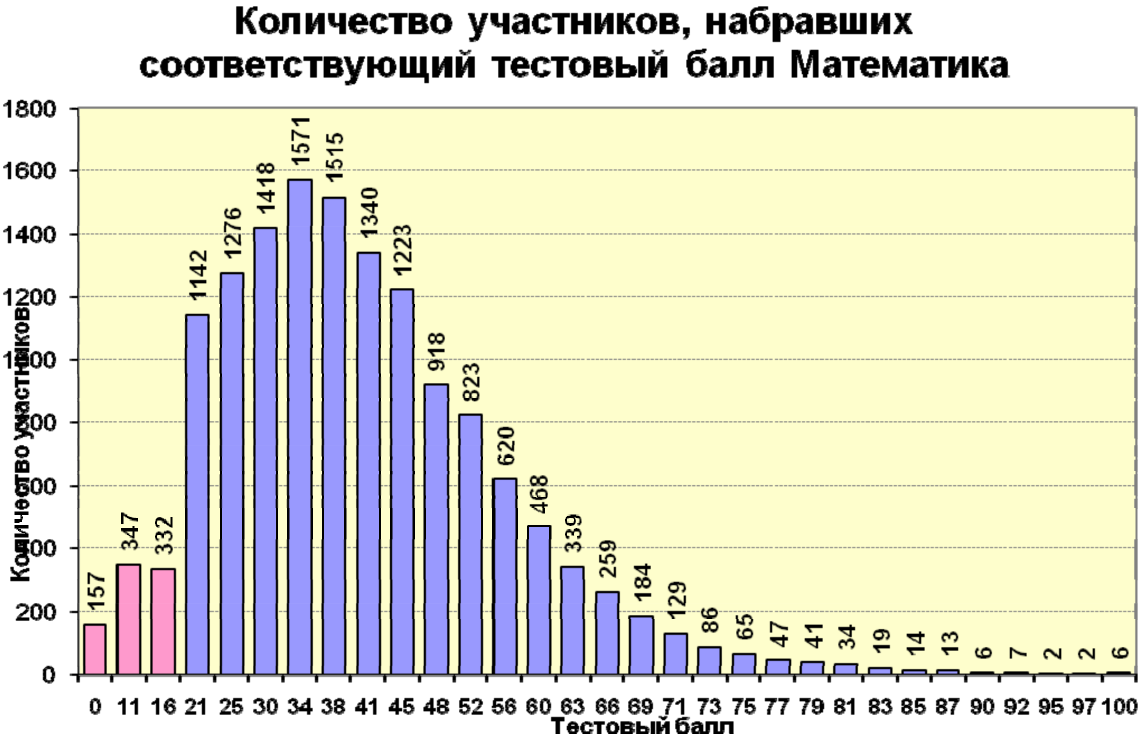
# 2012 г.


Распределение баллов. Математика
Кол-во набравших соответствующий балл
Баллы
0
5
10
15
20
24
28
32
36
40
44
48
52
56
60
63
66
68
70
72
74
77
79
81
83
85
87
90
92
94
96
72
131
203
219
236
923
1227
1328
1378
1354
1302
1179
1008
843
744
593
455
285
205
159
102
79
45
29
17
20
14
10
7
5
2

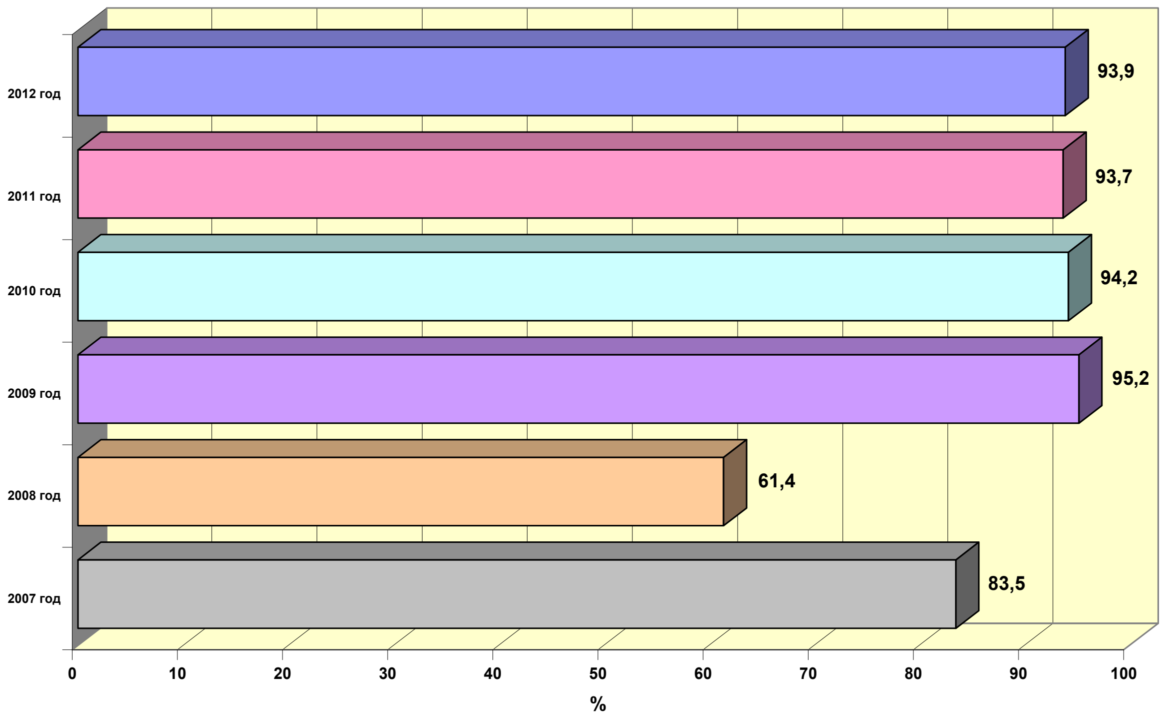
# 2011 г.


Количество участников, набравших соответствующий тестовый балл
Математика
Средний тестовый балл
Тестовый балл
0
6
12
18
24
30
34
38
41
45
49
52
56
60
63
66
68
70
73
75
77
80
82
84
87
89
91
94
96
98
100
61
199
369
527
665
741
908
999
859
873
857
801
753
557
456
289
230
174
127
109
77
56
37
35
28
14
5
15
5
6
2

**2010 г.**




Изменение результатов участников ЕГЭ, подтвердивших освоение основных общеобразовательных программ среднего (полного) общего образования по математике в динамике с 2007 по 2012 гг.



Для определения проблемных мест в подготовке выпускников к ЕГЭ особенно полезен анализ результатов по заданиям и содержательным блокам.

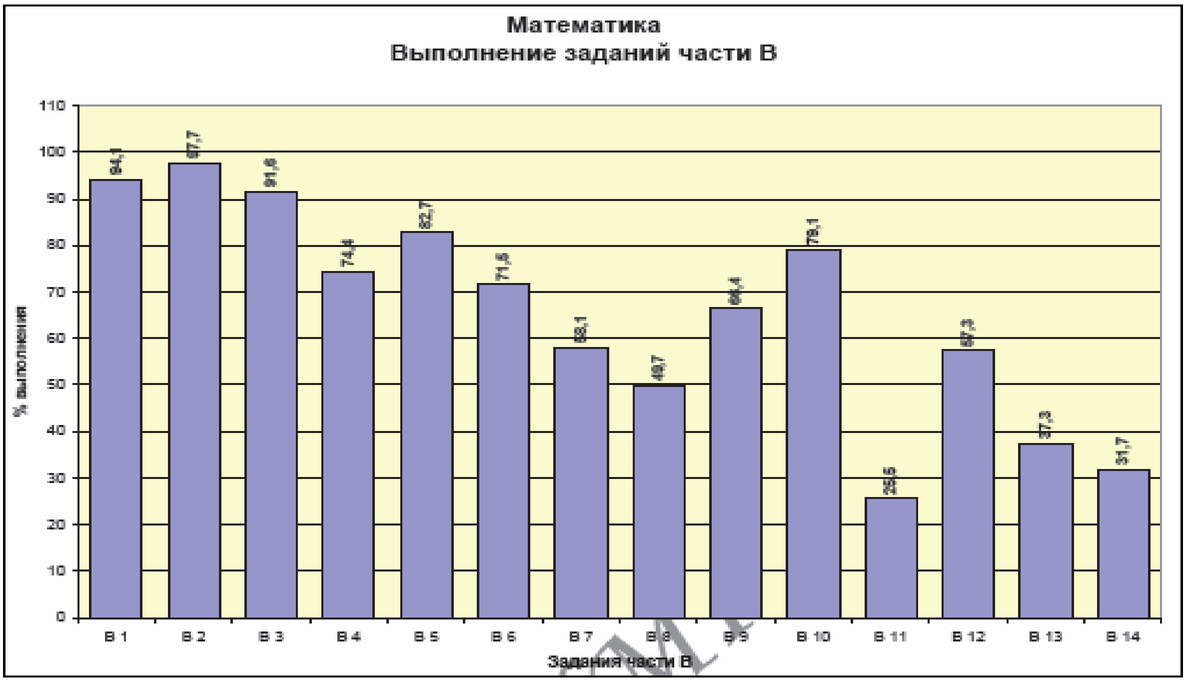
Таблица 6.

## Средние результаты выполнения заданий части В по области и по России

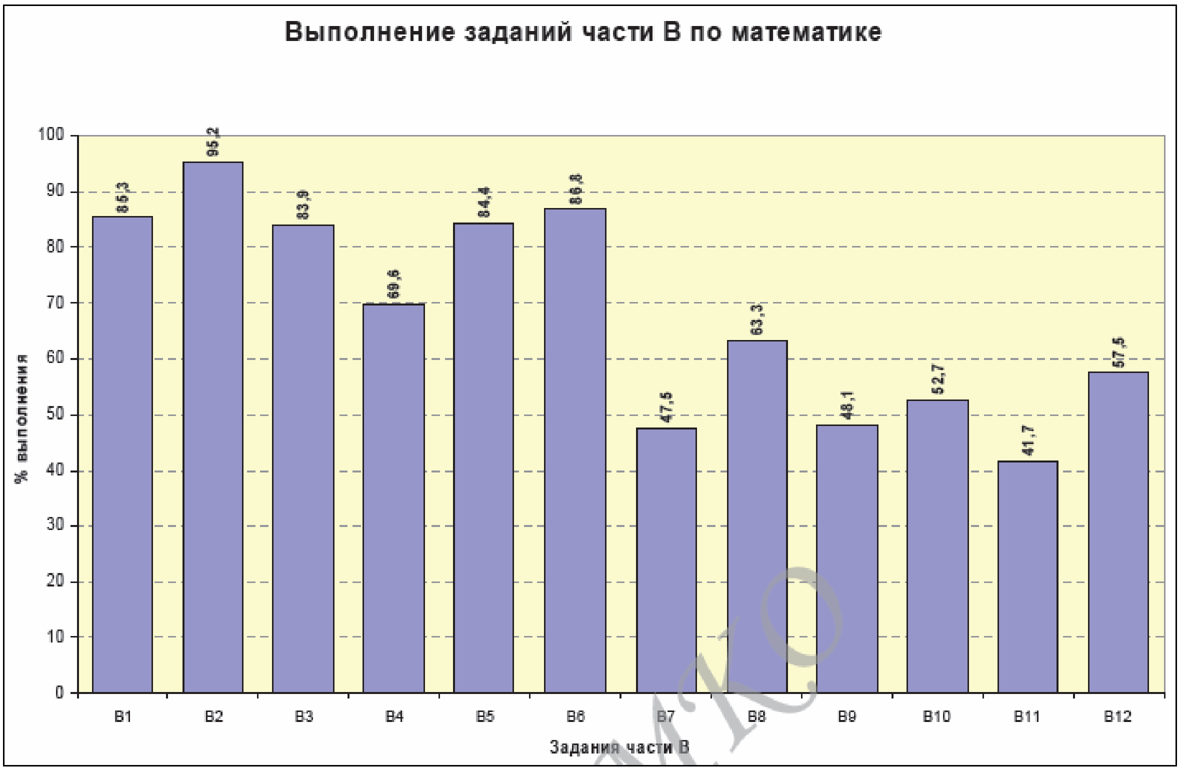
| Задание | Коды умений | Коды элементов содержания | Проверяемые умения (навыки) | Процент выполнения 2012 г. | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | Кемеровская область | РФ в целом |
| В1 | 6.1 | 1.1, 2.1.12 | Уметь использовать знания и умения в практической деятельности | 94,1 | 89,0 |
| В2 | 3.1, 6.2 | 3.1-3.3, 6.2.1 | Уметь использовать знания и умения в практической деятельности | 97,7 | 94,7 |
| В3 | 4.1 | 1.2,1.3 | Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами | 91,6 | 86,0 |
| В4 | 6.2, 6.3, 1.4.1 | 2.1.12 | Уметь использовать знания и умения в практической деятельности | 74,4 | 80,4 |
| В5 | 2.1 | 2.1, | Уметь решать уравнения и неравенства | 82,7 | 79,5 |
| В6 | 4.1, 5.2, 5.1.1-5.1.4 | 5.5.5 | Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами | 71,5 | 70,8 |
| В7 | 1.1-1.3 | 1.1-1.4 | Уметь выполнять вычисления и преобразования | 58,1 | 56,3 |
| В8 | 3.1-3.3 | 4.1,4.2 | Уметь выполнять действия с функциями | 49,7 | 40,7 |
| В9 | 4.2, 5.3, 5.5 | 4.2,5.3,5.5 | Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами | 66,4 | 72,1 |
| В10 | 5.4, 6.3 | 5.4,6.3 | Уметь строить и исследовать простейшие математические модели | 79,1 | 80,3 |
| В11 | 4.2, 5.3- 5.5 | 4.2,5.2-5.5 | Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами | 25,5 | 36,5 |
| В12 | 6.2,2.1,2.2 6.3 | 6.2,6.3,2.1,2.2 | Уметь использовать знания и умения в практической деятельности | 57,3 | 56,3 |
| В13 | 5.1, 2.1, 2.2 | 5.1,2.1,2.2 | Уметь строить и исследовать простейшие математические модели | 37,3 | 49,6 |
| В14 | 3.2,3.3,4.1,4.2 | 3.2,3.3,4.1,4.2 | Уметь выполнять действия с функциями | 31,7 | 41,7 |

Эти же табличные данные воспринимаются  более информативно и полно в графическом виде:

**2012 г.**




**2011 г.**



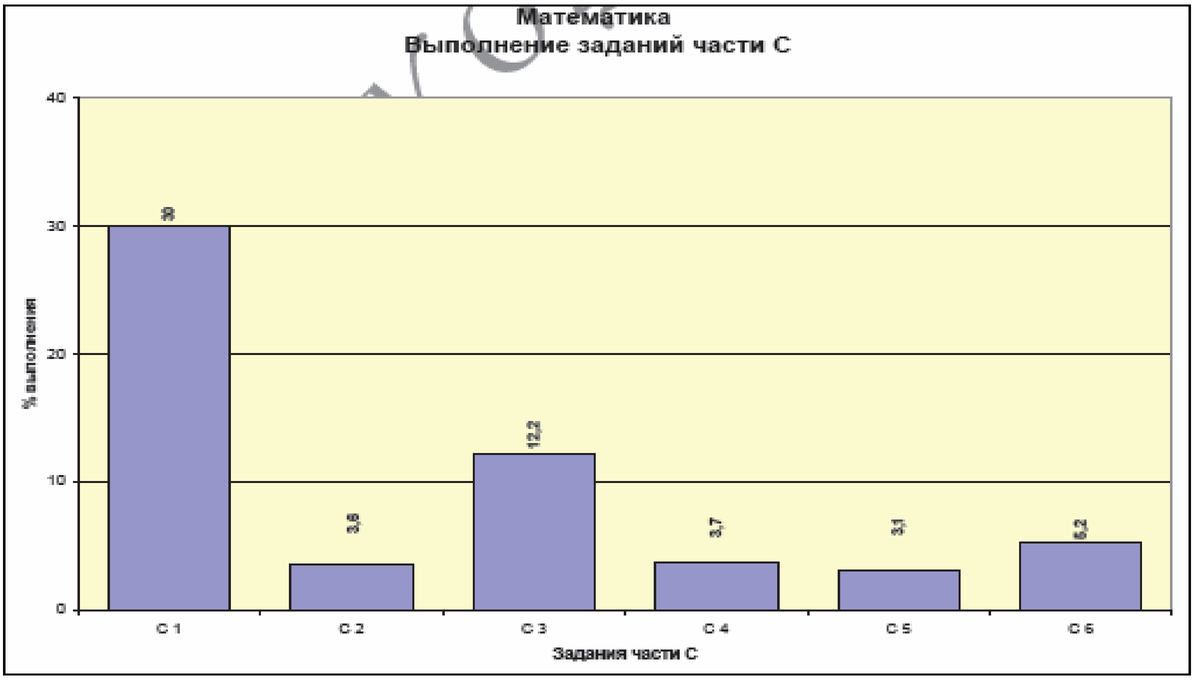
Приведем аналогичные данные по второй части С:

Таблица 7.

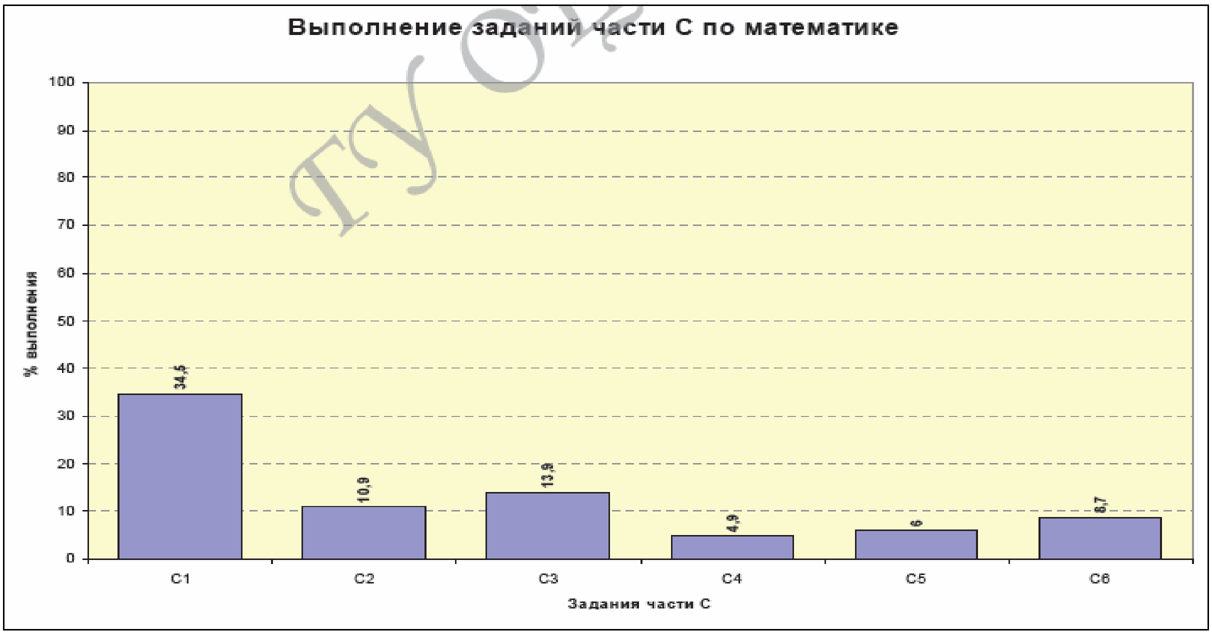
**Средние результаты выполнения заданий части С**
**по области и по России**

| Задание | Проверяемые умения (навыки) | Процент выполнения 2012 г. | |
|---|---|---|---|
| | | Кемеровская область | РФ в целом |
| С1 | Уметь решать уравнения и неравенства | 30 | 31,1 |
| С2 | Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами | 3,6 | 5,53 |
| С3 | Уметь решать уравнения и неравенства | 12,2 | 11,54 |
| С4 | Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами | 3,7 | 1,99 |
| С5 | Уметь решать уравнения и неравенства | 3,1 | 4,78 |
| С6 | Уметь строить и исследовать простейшие математические модели | 5,2 | 4,08 |

**2012 г.**



## 2011 г.




Сравнивая результаты ЕГЭ по отдельным заданиям в области и в РФ можно отметить наибольшее отставание наших выпускников в разделах геометрии, математического анализа и в практико-ориентированных задачах. Из части С наибольшую трудность представляли геометрические задачи С2, С4 и задача с параметром С5. Ниже мы проведем более детальный анализ результатов и характерных ошибок при решении наиболее трудных заданий.

В 2012 году сохранилась примерно прежняя градация результатов ЕГЭ по видам образовательных учреждений ( самый высокий средний балл в лицеях области, затем в гимназиях, затем в СОШсУИОП, ГОУ, В(С)ОШ, СПО и НПО):

**Средние баллы ЕГЭ по виду образовательного учреждения. Математика**

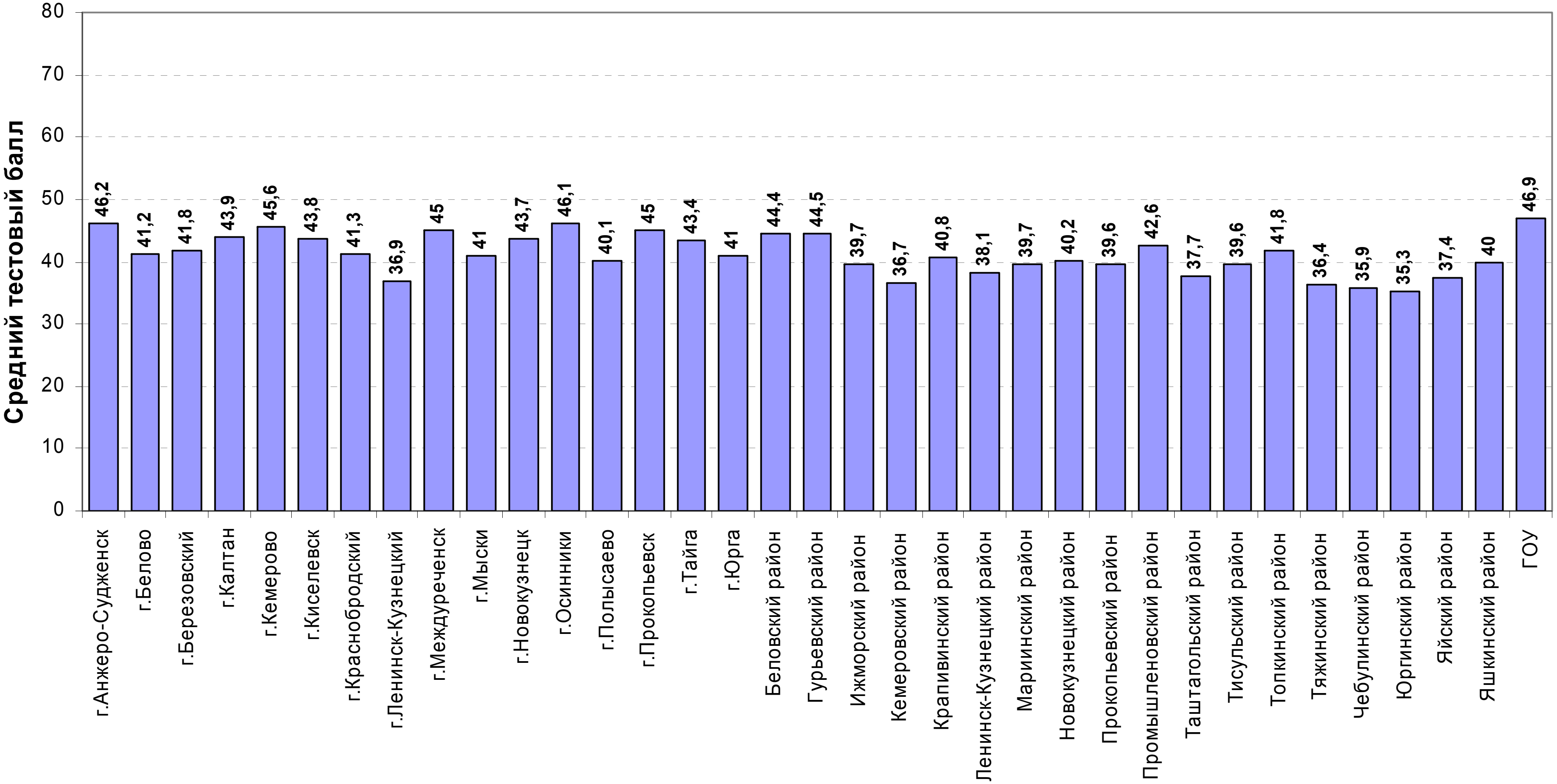
| Виды ОУ | 2012 г. | 2011 г | 2010 г |
|---|---|---|---|
| СОШ | 42,3 | 45,3 | 38,84 |
| Лицеи | 51,6 | 56,1 | 49,51 |
| Гимназии | 50 | 52,3 | 47,63 |
| СОШ с УИОП | 48,6 | 49,6 | 44,87 |
| ГОУ | 46,9 | 50,3 | 44,92 |
| В(С)ОШ | 25,6 | 29,5 | 26,15 |
| СПО | 21,5 | 25,6 | 19,85 |
| НПО | 17,9 | 19,8 | |

Более половина выпускников СПО и НПО не сдали ЕГЭ по математике в 2012 году, соответственно 56,2% и 62,9%. Самые высокие средние баллы по математике в 2012 году в Анжеро-Судженске – 46,2, в Осинниках-46,1 и Кемерово - 45,6, а самые низкие показатели в районах Юргинском – 35,3, Чебулинском - 35,9 и Тяжинском - 36,4 (напомним, что средний балл по области - 43,1) . Конечно, на результаты в территориях влияет структура ОУ, например, где-то больше вечерних школ, НПО и СПО, которые имеют традиционно самые низкие показатели по ЕГЭ.

Из конкретных образовательных учреждений в 2012 году следует отметить лицей №35 г. Новокузнецка – 67,3 (в 2011 65,4) , городской классический лицей г. Кемерова – 64,8 (в 2011- 66 баллов), лицей № 20 г. Междуреченска – 62,4 ( 2011- 63,8 балла) ( средний балл по лицеям области - 51,6 в текущем году и 56,1 в предыдущем); гимназию № 6 г.Междуреченска –59,7 (2011 - 61,7 балла) , гимназию № 62 г.Новокузнецка – 56,7 (2011 -61,2 балла), гимназию № 17 г.Кемерова – 56,7 балла (средний балл по гимназиям области – 50,0 в 2012 году и 52,3 в 2011); СОШсУИОП № 32 г.Прокопьевска 56,6 , СОШсУИОП № 15 г.Прокопьевска - 52,7 (по СОШсУИОП средний балл 48,6); Губернаторский многопрофильный лицей-интернат (г.Кемерово) – 54,7 балла , Кадетскую школу-интернат (г.Тайга)- 53, 9 (средний бал по ГОУ – 46,9); СОШ №30 г. Таштагола и Тисульская СОШ – по 60 баллов, СОШ № 28 г. Кемерова -55,4 (средний балл по СОШ в 2012 году - 42,3 против 45,3 в прошлом).

В список учебных заведений, в которых выпускники получили самые высокие баллы ( 92 - 96) , вошли лицей №20 г. Междуреченска, лицей г Кемерова , лицей № 84 г. Новокузнецка , лицей № 62 г.Кемерова , гимназия № 11 и СОШ№12 г.Анжеро-Судженска, СОШ №14 г. Прокопьевска. Более подробную и разнообразную информацию можно найти в сборнике статистических данных по ЕГЭ 2012 областного центра мониторинга качества образования (ОЦМКО). Приведем лишь диаграмму распределения среднего балла ЕГЭ по территориям области.

## Распределение среднего тестового балла по городам, сельским районам Математика



## 3. Детализация результатов ЕГЭ и качественная картина подготовленности выпускников по математике в 2012 году

Наряду с увеличением числа заданий в КИМ-ах 2012 года изменился порядок следования заданий: они располагаются в порядке нарастания сложности. Наверное это лучше для участников, которые ориентированы только на преодоление минимального рубежа, однако затрудняет сравнение результатов по годам, однотипные задания в КИМ-ах разных лет не совпадают по номеру.

Далее мы остановимся на анализе отдельных заданий и результатов по ним, затем попытаемся представить, что стоит за сухими цифрами статистики. Однако следует иметь ввиду, что выпускники, не планирующие использование результатов экзаменов для поступления в учебные заведения, **слабо мотивированы** в получении качественных знаний и достижении высоких баллов по «непрофильным» на их взгляд предметам. В частности, в результатах по русскому языку заинтересованность более массовая, чем в результатах по математике, поэтому это обстоятельства следует учитывать при формировании выводов по результатам ЕГЭ о тенденциях уровня подготовленности выпускников и качества образовательного процесса. Например, падение среднего балла по математике может свидетельствовать об изменениях структуры профессиональной ориентированности выпускников, а вовсе не об ухудшении образовательного процесса.

### ЧАСТЬ 1

**B1 (2012)** В летнем лагере 236 детей и 28 воспитателей. В автобус помещается не более 49 пассажиров. Какое наименьшее количество автобусов понадобится, чтобы за один раз перевезти всех из лагеря в город?

**B1 (2011)** Шоколадка стоит 15 рублей. В воскресенье в суперммаркете действует специальное предложение: заплатив за три шоколадки, покупатель получает 4 (одну в подарок). Сколько шоколадок можно получить на 110 рублей в воскресенье?

**В1 (2010)** Шариковая ручка стоит 20 рублей. Какое наибольшее число таких ручек можно будет купить на 400 рублей после повышения цены на 10%?

*Тип задания:*

Задание на умение использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни.

*Характеристика задания:*

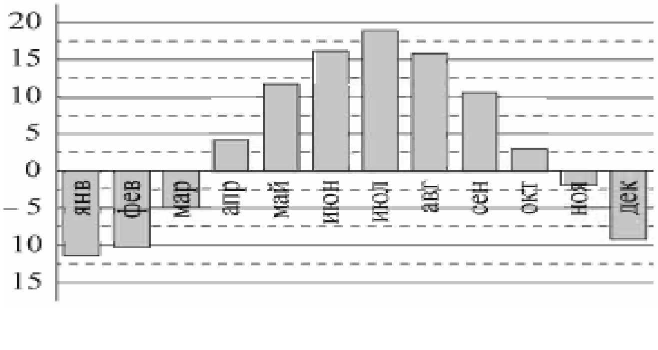
Задание, моделирующее реальную жизненную ситуацию.

Процент правильных ответов в 2012 году – 94,1%, 2011году – 85,3%, в 2010 году – 83,24%.

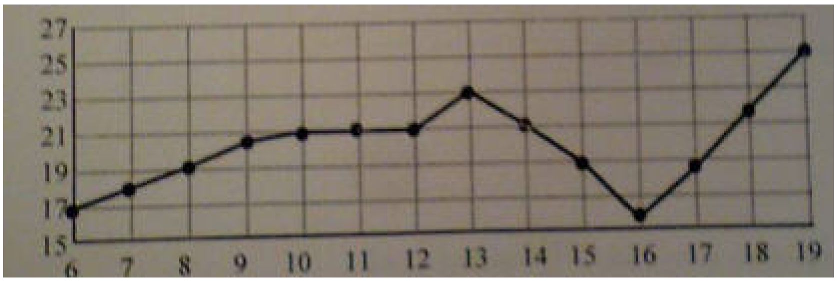
По России: в 2012 году – 89 %, в 2011году – 80,1%, в 2010 году – 81,5%.

Задача проверяет адекватность восприятия практико-ориентированных задач, изложенных неформализованным текстовым способом. Для решения задачи достаточно уметь выполнять арифметические действия, делать прикидку и оценку. Причиной ошибок является неумение старшеклассников прочитать условия задачи, правильно их понять и интерпретировать. Большинство ошибок связано с неправильной трактовкой условий. Как видно из приведенных данных, в целом выпускники показали достаточно хорошие результаты. Вместе с тем, в решении даже самых простых задач допускает ошибки **каждый десятый** участник экзамена.

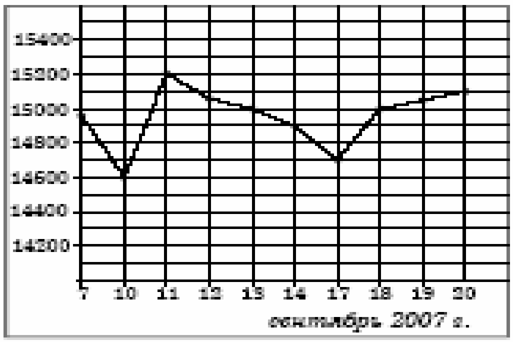
**В2 (2012)** На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха (в градусах Цельсия) в Нижнем Новгороде по результатам многолетних наблюдений. Найдите по диаграмме количество месяцев, когда среднемесячная температура в Нижнем Новгороде положительна.



**В2 (2011)** На рисунке жирными точками показано среднесуточная температура в Бресте каждый день с 6 по 19 июля 1981 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали - температура в градусах Цельсия. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какой была наибольшая среднесуточная температура за указанный период. Ответ дайте в градусах Цельсия.




**В2 (2010)** На рисунке жирными точками показана цена олова на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 7 по 20 сентября 2007 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали – цена тонны олова вдолларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наименьшую цену олова на момент закрытия торгов в указанный период (в долларах США за тонну).




*Тип задания:*

Задание на чтение графика функции.

*Характеристика задания:*

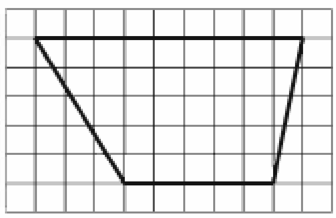
Задание, моделирующее реальную жизненную ситуацию. График характеризует изменение в зависимости от времени некоторой величины (температуры, стоимости акций и т.д.) Задание требует понимания текста и умения «читать» распространенную графическую информацию. В общем, оно выглядит ободряющим бонусом.

Процент правильных ответов в 2012 оду – 97,7%, в 2011году – 95,2%, в 2010 году –93,43%.

По России: в 2012 году – 94,7%, в 2011году – 95,6%, в 2010 году – 92,6%.

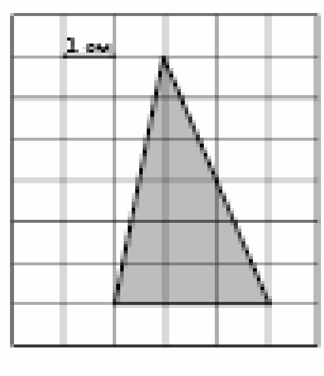
Задача, позволяющая оценить уровень сформированности умения считывать и анализировать графическую информацию. Задачи такого типа делятся на две четко разграниченных группы: в первой требуется найти точку оси абсцисс, ответив на вопрос, «какого числа значение величины было равно данному значению», во второй – найти наибольшее или наименьшее значение некоторой величины, т.е. точку оси ординат. Вероятно, часть ошибочных ответов обусловлена невнимательностью: перепутаны наибольшее и наименьшее значения или вместо числа месяца в ответ указывается значение, которого величина достигла в указанную дату.

**В3 (2012).** Найдите площадь трапеции, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см Х 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



**В6 (2011).** Найдите площадь трапеции, изображенной на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

**В6 (2010).** Найдите площадь треугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.




*Тип задания:*

Вычисление площади плоской фигуры.

*Характеристика задания:*

Задание на вычисление площади трапеции или треугольника, изображенных на клетчатой бумаге со стороной клетки 1.

Процент правильных ответов в 2012 году – 91, 6 %, в 2011году – 86,8%, в 2010 году – 86,68%.

По России: в 2012 году –86,0%, в 2011году – 85,0%, в 2010 году – 86,3%.

Площадь искомой фигуры может быть найдена по известной формуле. Можно решить задачу, разбив фигуру на части, вычисление площадей которых не представляет труда или, заметив, что фигура сама является частью другой фигуры.

**В4 (2012).** В таблице даны тарифы на услуги трёх фирм такси. Предполагается поездка длительностью 60 минут. Нужно выбрать фирму, в которой заказ будет стоить дешевле всего. Сколько рублей будет стоить этот заказ?

| **Фирма такси** | **Подача Машины** | **Продолжительность и стоимость минимальной поездки*** | **Стоимость 1 минуты сверх продолжительности минималькой поездки** |
|---|---|---|---|
| А | 200 руб. | Нет | 13 руб. |
| Б | Бесплатно | 15 мин. - 225 руб. | 15 руб. |
| В | 180 руб. | 20 мин. - 200 руб. | 14 руб. |

*Если поездка продолжается меньше указанного времени, она оплачивается по стоимости минимальной поездки.

**B5 (2011).** Семья из трех человек планирует поехать из Санкт-Петербурга в Вологду. Можно ехать поездом, а можно - на своей машине. Билет на поезд на одного человека стоит 760 рублей. Автомобиль расходует 9 литров бензина на 100 километров пути, расстояние по шоссе равно 700 км, а цена бензина равна 18.5 рубля за литр. Сколько рублей придется заплатить за наиболее дешевую поездку на троих?

**B5 (2010).** Для изготовления книжных полок требуется заказать 20 одинаковых стекол в одной из трех фирм. Площадь каждого стекла 0,35 м2 . В таблице приведены цены на стекло, а также на резку стекла и шлифовку края. Сколько рублейбудет стоить самый дешевый заказ?

| Фирма | Цена стекла (рублей за 1 $м^2$) | Резка и шлифовка (рублей за одно стекло) |
|---|---|---|
| А | 510 | 75 |
| Б | 530 | 65 |
| В | 570 | 55 |

*Тип задания:*

Задание на анализ практической ситуации.

*Характеристика задания:*

Несложная текстовая задача (возможно с табличными данными) на оптимальное решение, моделирующая реальную ситуацию.

Процент правильных ответов в 2012 году – 74,4%, в 2011году – 84,4%, в 2010 году – 54,94%.

По России: в 2012 году –80,4%, в 2011году – 87,2%, в 2010 году – 79,3%.

Чтобы решить задачу, достаточно вычислить стоимость поездки в различных случаях и сравнить результаты. Значительно хуже справились выпускники этого года с решением задач такого типа, скорее всего это связано с возрастанием числа вычислительных ошибок.

**B5 (2012).** Найдите корень уравнения $\log_2(x+11)=4$.

**B3 (2011).** Найдите корень уравнения $\sqrt{52-3x}=7$.

**B3 (2010).** Найдите корень уравнения $5^{x-18}=\frac{1}{25}$.

*Тип задания:*

Уравнение базового уровня.

*Характеристика задания:*

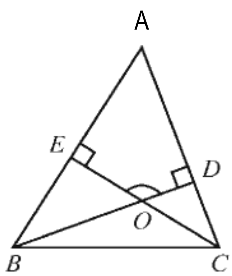
Решение несложного показательного, логарифмического или иррационального уравнения.

Процент правильных ответов в 2012 году – 82,7%, в 2011году – 83,9%, в 2010 году –76,42%.

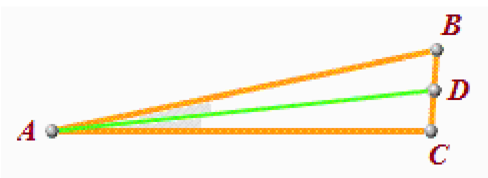
По России: в 2012 году –79,5%, в 2011году – 88,6%, в 2010 году – 81,4%.

Уравнение сводится в одно действие к линейному уравнению. Неправильные ответы связаны в основном с арифметическими ошибками, ошибками при решении линейного уравнения или незнанием определения логарифмической и показательной функций. Как видно из приведенных данных, в целом выпускники показали неплохие результаты, причем сравнивая результаты выполнения за два года, можно отметить, что лучше выпускники решают иррациональные уравнения, чем показательные.

**B6 (2012).** В треугольнике $ABC$ угол $A$ равен 65°, углы $B$ и С острые, высоты $BD$ и CE пересекаются в точке O . Найдите угол $DOE$ . Ответ дайте в градусах.




**B4 (2011).** В треугольнике $ABC$ $AD$ - биссектриса, угол $C$ равен 108°, угол $CAD$ равен 8°. Найдите угол $B$. Ответ дайте в градусах.



**B4 (2010).** В треугольнике $ABC$ угол $C$ равен 90°, $\cos B = \frac{4}{5}$, $AB$ =10. Найдите $AC$.

*Тип задания:*

Задание на вычисление углов треугольника и тригонометрических функций от них.

*Характеристика задания:*

Задача по готовому чертежу, связанная с применением теоремы о сумме углов треугольника и понятием высоты (2012) или биссектрисы угла треугольника (2011). Это простейшее упражнение на знание простейших фактов и определений тригонометрических функций (2011 и 2010 гг.) и может быть на умение применять теорему Пифагора (2010).

Процент правильных ответов в 2012 году –71,5 %, в 2011году – 69,6%, в 2010 году – 66,08%.

По России: в 2012 году –70,8%, в 2011году – 75,7%, в 2010 году – 74,7%.

**B7 (2012).** Найдите $tg\,\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{34}}{34}$, $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

**B7 (2011).** Найдите cos α, если $\sin\alpha = \frac{-\sqrt{21}}{5}$, $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$.

**B7 (2010).** Найдите значение выражения $3^{3+\log_3 2}$.

*Тип задания:*

Задание на вычисление значения числового или буквенного выражения.

*Характеристика задания:*

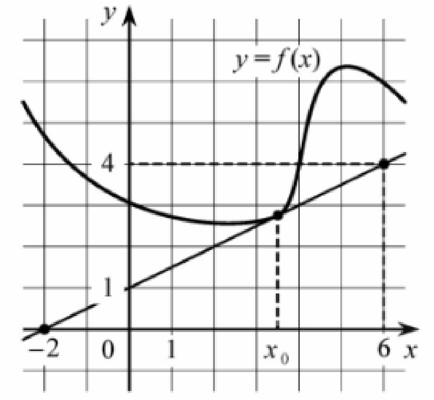
Задача на нахождение значения функции, тригонометрической, показательной или логарифмической.

Процент правильных ответов в 2012 году – 68,1%, в 2011году – 47,5%, в 2010 году – 43,36%.

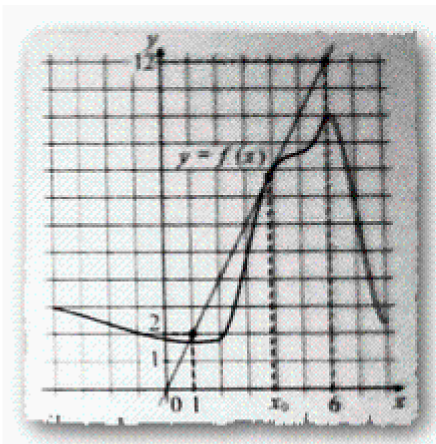
По России: в 2012 году – 56,3%, в 2011году – 52,5%, в 2010 году – 60,9%.

Наибольшие проблемы вероятно в незнании формул тригонометрии и в определении знака функции в данной четверти. В 2010 году необходимо было выполнить тождественные преобразования логарифмических выражений, а в этом и 2011 годах – нахождение значения тригонометрической функции.

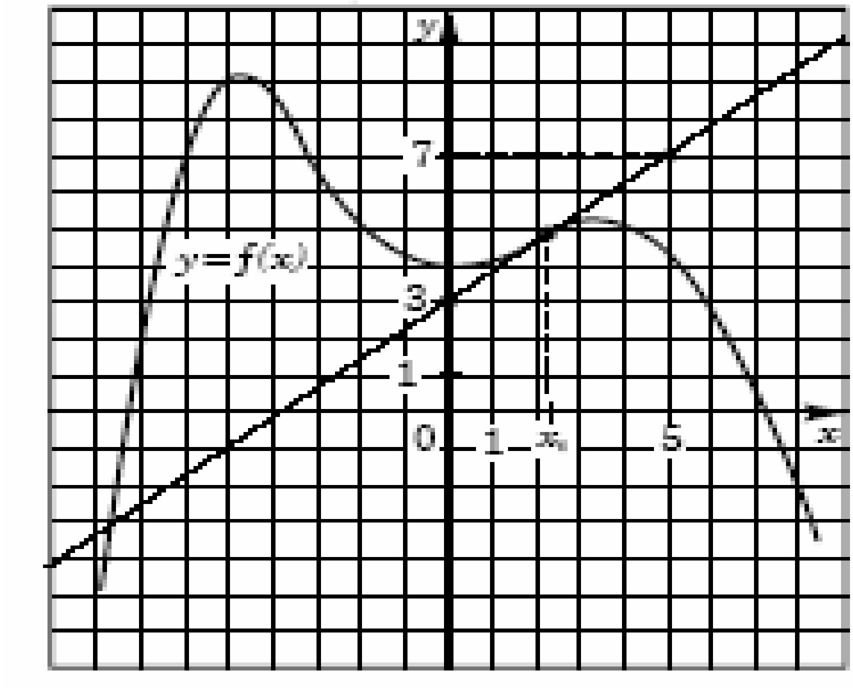
**B8 (2012).** На рисунке изображены график дифференцируемой функции *y = f(x)* и касательная к нему в точке с абсциссой $x_0$. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке $x_0$.




**B8 (2011).** На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведенная в точке с абсциссой $x_0$. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке $x_0$.




**B8 (2010).** На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведенная в точке с абсциссой $x_0$. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке $x_0$.




*Тип задания:*

Задание на вычисление производной.

*Характеристика задания:*

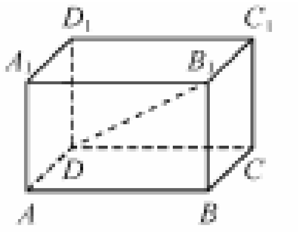
Традиционная задача для ЕГЭ на вычисление производной по данным приводимого в условии рисунка, представляющего собой, изображенные на клетчатой бумаге графика функции и касательной к нему. В данном упражнении нужно знать геометрический смысл производной, может даже определение тангенса, но догадываться или что-то придумывать не надо.

Процент правильных ответов в 2012 году – 49,7%, в 2011году – 63,3%, в 2010 году – 45,5%.

По России: в 2012 году – 40,7%, в 2011году – 64,2%, в 2010 году – 46%.

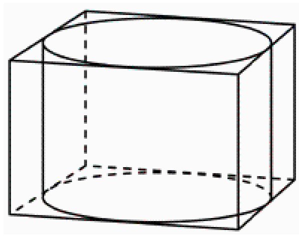
Заметно ниже стали показатели выполнения этого задания в этом году в области и по России. Решение задачи состоит в вычислении углового коэффициента касательной или тангенса угла, который касательная образует с положительным направлением оси абсцисс. Для этого достаточно найти отрезок касательной с концами в вершинах клеток, считая его гипотенузой прямоугольного треугольника, найти отношение катетов. Ошибки связаны с непониманием геометрического смысла производной или в определении знака, в зависимости от вида угла. Другое решение: составить уравнение касательной по двум точкам и найти угловой коэффициент прямой.

**B9 (2012).** В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $AA_1$ =10, $AB=5,$ $A_1D_1$ =10. Найдите длину диагонали $DB_1$.




**B9( 2011).** Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 2. Найдите объём параллелепипеда.

**B9 (2010).** Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания которого равен 3. Объем параллелепипеда равен 36. Найдите высоту цилиндра.



*Тип задания:*

Задание на вычисление площадей или объемов многогранников и тел вращения, в том числе вписанных или описанных около других многогранников или тел вращения.

*Характеристика задания:*

Задача на нахождение объема прямоугольного параллелепипеда, описанного около цилиндра.

Процент правильных ответов в 2012 году – 66,4%, в 2011году – 48,1%, в 2010 году – 46,27%.

По России: в 2012 году – 72,1%, в 2011году – 68,7%, в 2010 году – 51%.

Для решения задачи достаточно знать формулу Пифагора. Ошибки связаны с недостаточным знанием фактов планиметрии (например в 2011 и 2010 годах, с тем, что окружность можно вписать только в квадрат). Больше половины экзаменуемых справились с решением стереометрической задачи, что лучше, чем в прошлом году. Задание на вычисление высоты через объем и площадь основания предполагает знание простейших формул, и понимание того, что в основании лежит квадрат с вполне определяемой длиной стороны.

**B10 (2012)** В среднем из 900 садовых насосов, поступивших в продажу, 27 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

*Тип задания:*

Задание на определение вероятности некоторого случайного события.

*Характеристика задания:*

Задача на вычисление вероятности в простейшей практической ситуации.

Процент правильных ответов в 2012 году – 79,1%. По России: в 2012 году – 80,3%. Задание добавлено в этом году.

Для решения необходимо знать формулу вычисления вероятности в простейшем случае.

**B11 (2012)** В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 16 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если её перелить во второй цилиндрический сосуд, диаметр которого в 2 раза больше диаметра первого? Ответ выразите в сантиметрах.

*Тип задания:*

Задание на анализ практической ситуации, сводящееся к составлению и решению уравнения.

*Характеристика задания:*

Текстовое задание, моделирующее реальную ситуацию, предполагает простейший анализ формулы объема цилиндрического тела.

Процент правильных ответов в 2012 году – 25,6%.

По России: в 2012 году – 36,5%.

Сравнительно несложная задача практического содержания, сводящаяся к подстановке данных числовых значений величин в формулу объема и решению простейшего уравнения. Многие выпускники не приступают к решению, так как иногда просто пугаются геометрических задач. Это новое задание геометрического содержания с практической направленностью, оно оказалось наиболее трудным из заданий первой части.

**B12 (2012)** Зависимость объёма спроса q (единиц в месяц) на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб.) задаётся формулой q = 60-5p. Выручка предприятия за месяц r (тыс. руб.) вычисляется по формуле $r(p) = pq$. Определите наибольшую цену p, при которой месячная выручка $r(p)$ составит 100 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.

**B10 (2011)**. В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где $m_0$ - начальная масса изотопа, $t$ (мин) - время, прошедшее от начального момента, $T$ (мин.) - период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа $m_0$=70 мг . Период его полураспада $T = 9$ мин. Через сколько минут масса изотопа будет равна 17.5 мг?

**B10 (2010)**. Для одного из предприятий-монополистов зависимость объема спроса на продукцию $q$ (единиц в месяц) от ее цены $p$ (тыс. руб.) задается формулой: $q = 65 - 5p$ . Определите максимальный уровень цены $p$ (в тыс. руб.), при котором значение выручки предприятия за месяц $r = q \bullet p$ составит не менее 110 тыс. руб.

*Тип задания:*

Задание на анализ практической ситуации, сводящееся к составлению и решению уравнения или неравенства (2010).

*Характеристика задания:*

Текстовое задание, моделирующее реальную ситуацию, предполагает простейший анализ реального процесса экономического содержания.

Процент правильных ответов в 2012 году – 57,3%, в 2011году – 52,7%, в 2010 году – 46,3%.

По России: в 2012 году – 56,3%, в 2011году – 55,2%, в 2010 году – 55,3%.

Основные проблемы в решении : трудности с вычислениями (действия с десятичными дробями) и неумение решать показательное уравнение. Необходимо учителям обратить внимание на усиление внутрипредметных и межпредметных связей в математике как необходимого условия для выполнения такого типа практико-ориентированных заданий.

**В13 (2012)**. На изготовление 540 деталей первый рабочий затрачивает на 12 часов меньше, чем второй рабочий на изготовление 600 деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 10 деталей больше, чем второй. Сколько деталей в час делает первый рабочий?

**В12 (2011)**. Из пункта А в пункт В, расстояние между которыми 60 км, одновременно выехали мотоциклист и велосипедист. Известно, что за час мотоциклист проезжает на 50 км больше, чем велосипедист. Определите скорость велосипедиста, если известно, что он прибыл в пункт В на 5 часов позже мотоциклиста. Ответ дайте в км/ч.

**В12 (2010)**. Баржа в 10:00 вышла из пункта *A* в пункт *B*, расположенный в 15 км от *A*. Пробыв в пункте *B* 4 часа, баржа отправилась назад и вернулась в пункт *A* в 18:00 того же дня. Определите (в км/ч) скорость течения реки, если известно, что собственная скорость баржи равна 8 км/ч.

*Тип задания:*

Задача на составление уравнения.

*Характеристика задания:*

Традиционная текстовая задача на работу или «движение», сводящаяся к составлению и решению дробно-рационального уравнения.

Процент правильных ответов в в 2012 году – 37,3%, 2011году – 57,5%, в 2010 году – 33,88%.

По России: в 2012 году – 49,6%, в 2011году – 67,6%, в 2010 году – 49,7%.

Наибольшие трудности: в составлении уравнения по условию задачи, неумении решать дробно-рациональное уравнение и вычислительные ошибки. В этом году выпускники справились заметно хуже, чем в прошлом. Скорее всего это связано в тем, что в прошлом году предлагалась задача на «движение».

**В14 (2012)**. Найдите наименьшее значение функции $y = (x-8)^2(x-7)-8$ на отрезке $[7,5;18]$.

**В11 (2011)**. Найдите ***наибольшее*** значение функции $y = x^3+4x^2+4x-4$ на отрезке $[-4;-1]$.

**В11 (2010)**. Найдите наименьшее значение функции $y = 6\cos x - \dfrac{21}{\pi}x+7$ на отрезке $\left[-\frac{2\pi}{3};0\right]$.

*Тип задания:*

Задание на исследование функции с помощью производной.

*Характеристика задания:*

Задание на нахождение наибольшего (или наименьшего) значения функции на отрезке.

Процент правильных ответов в 2012 году – 31,7%, в 2011году – 41,7%, в 2010 году – 17,6%.

По России: в 2012 году – 41,7%, в 2011году –49%, в 2010 году – 53,2%.

Классическая задача темы «Производная функции» оказалось самой «не решаемой» задачей части В. Больше половины участников ЕГЭ испытывают трудности при решении такого типа задач или не приступают к их решению.

Основные ошибки: неуверенное владение алгоритмом вычисления наибольшего (наименьшего) значения функции на заданном отрезке, дифференцирование многочлена, решение квадратного уравнения, технические вычисления. Это чисто математическое задание на применение понятия производной к анализу свойств элементарных функций.

## ЧАСТЬ 2

Все задания части С в определенной степени проверяли математическую компетентность школьников, поскольку для их выполнения требовалось не только воспроизведение изученного, но и анализ относительно новой ситуации и самостоятельный поиск способа решения проблемы, которая была поставлена перед выпускником. К выполнению заданий с развёрнутым ответом приступили почти половина участников ЕГЭ. Задания с развернутым ответом обладают высокой диагностической и дифференцирующей способностью и позволяют выявить сформированность умений комплексного использования знаний.

**С1 (2012).** а) Решите уравнение $4\cos^2 x + 4\sin x - 1 = 0$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi\ ;\ \dfrac{5\pi}{2}\right]$.

**С1 (2011).** Решите уравнение $(2\cos^2 x + 11\cos x + 5)\cdot\log_{18}(\sin x) = 0$ .

**С1 (2010).** Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} y - \cos x = 0, \\ (5\sqrt{\cos x} - 1)(7y + 5) = 0. \end{cases}$$

*Тип задания:*

Уравнение или система уравнений повышенного уровня сложности.

*Характеристика задания:*

Решение тригонометрического или комбинированного уравнения (тригонометрическо-иррационального или тригонометрическо-логарифмического 2011, 2010 гг.) с отбором корней.

Процент положительных оценок в 2012 году – 30%, в 2011году – 34,5%, в 2010 году – 22,16%.

По России: в 2012 году – 31,1%, в 2011году –41,8%, в 2010 году – 32,3%.

Решение этого задания по силам большинству хорошо успевающих по математике выпускников. Как правило, уравнение требует замены переменной, позволяющей свести уравнение к квадратному уравнению и проведения отбора корней, обусловленных ограниченностью новой переменной или областью допустимых значений переменной.

Основные ошибки:

- неумение решать тригонометрические уравнения с заменой переменной;

- незнание формул для решения простейших тригонометрических уравнений;

- незнание свойств ограниченности синуса и косинуса;

- неумение решать логарифмические уравнения;

- неумение отбирать решения уравнения с помощью тригонометрической окружности.

**С2 (2012).** В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 2, боковые рёбра равны 3, точка D - середина ребра $CC_1$. Найдите расстояние от вершины $C$ до плоскости $ADB_1$.

**С2 (2011).** В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, стороны основания которой равны 5, а боковые ребра равны 11, найдите расстояние от точки А до прямой $E_1D_1$.

**С2 (2010).** В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны ребра: $AB$=5, $AD$ =1 2, $CC_1$ = 2. Найдите угол между плоскостями $BDD_1$ и $AD_1B_1$.

*Тип задания:*

Стереометрическая задача повышенного уровня сложности.

*Характеристика задания:*

Стереометрическая задача на вычисление расстояния от точки до плоскости или до прямой в правильных призмах, или угла между заданными плоскостями.

Процент положительных оценок в 2012 году – 3,6%, в 2011году – 10,9%, в 2010 году – 7,7%.

По России: в 2012 году – 5,53%, в 2011году –13,9,8%, в 2010 году – 11,6%.

Задание С2 вроде бы должна быть посильной стереометрической задачей для большинства успевающих выпускников, однако она оказалась одной из двух наиболее трудных задач второй части КИМ-ов. Дело в том, что в задаче 2012 года для определения направленности перпендикуляра к плоскости необходимы дополнительные построения или рассуждения, основанные на развитом пространственном воображении.

Основные ошибки:

- неумение построить отрезок, который будет являться расстоянием от точки до плоскости или до прямой или построить угол между плоскостями;

- ошибки в определении видов треугольников;

- в решении прямоугольного треугольника;

- вычислительные ошибки.

**С3 (2012).** Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 2^{2x} + 12 \cdot 4^{-x} \le 13, \\ \log_{0,04} 125x \cdot \log_{25x} 5 + \dfrac{3}{4} \ge 0. \end{cases}$$

**С3 (2011).** Решите неравенство $\dfrac{2 \cdot \log_5(x^2 - 5x)}{\log_5 x^2} \le 1$.

**С3 (2010).** Решите неравенство $\dfrac{\log_{5^{x+3}} 25}{\log_{5^{x+3}}(-25x)} \le \dfrac{1}{\log_5 \log_{\frac{1}{5}} 5^x}$.

*Тип задания:*

Неравенство, повышенного уровня сложности.

*Характеристика задания:*

Решение системы неравенств или неравенства, содержащих степени, дроби, корни, логарифмы.

Процент положительных оценок в 2012году – 12,2%, в 2011году – 13,9%, в 2010 году – 6,92%.

По России: в 2012году – 11,54%, в 2011году –19,5%, в 2010 году – 11,8%.

Достаточно низкими оказались результаты выполнения этого задания. Этот результат косвенно свидетельствует о недостаточном уровне освоения выпускниками темы «Логарифмы», «Показательная функция». В то же время, крайне малое количество участников экзамена, получивших за выполнение задания С3 более высокие баллы, показывает, что недостатки в подготовке связаны с базовыми умениями: решение рациональных неравенств, ОДЗ неравенств, логарифмические преобразования и т.п.

Основные ошибки:

- неумение выполнять тождественные преобразования логарифмических выражений;
- неумение разложить квадратный трехчлен на множители;
- неучитывание ОДЗ;
- неумение решать логарифмические неравенства;
- вычислительные ошибки.

**С4 (2012).** Синус угла при основании равнобедренного треугольника равен 8/17, а основание равно 60. Внутри него расположены две равные касающиеся окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника. Найдите радиусы окружностей.

**С4 (2011).** Окружность вписана в равнобедренную трапецию, основания которой равны 18 и 50. Прямая, проходящая через центр окружности и вершину трапеции, отсекает от трапеции треугольник. Найдите отношение площади этого треугольника к площади трапеции.

**С4 (2010).** В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов при стороне $AD$ делят сторону $BC$ точками $M$ и $N$ так, что $BM:MN = 1:9$. Найдите $BC$, если $AB = 7$.

*Тип задания:*

Планиметрическая задача повышенного уровня сложности.

*Характеристика задания:*

Задача на вычисление радиуса вписанных окружностей, площадей фигур или линейных размеров многоугольников.

Процент положительных оценок в 2012году – 3,7%, в 2011году – 4,9%, в 2010 году – 4,78%.

По России: в 2012году – 1,99%, в 2011году –4,44%, в 2010 году – 1,3%.

Задача дополнительно осложняется необходимостью рассматривать два случая. При любом подходе к решению этой задачи от выпускника требовалось понимание реализуемости различных геометрических конфигураций и умение вычислять стандартные элементы в заданном треугольнике, составлять необходимые соотношения. Как в любой геометрической, и особенно, достаточно сложной геометрической задаче очень важным являлся вопрос о степени и характере обоснованности утверждений и построений. Достаточным являлось наличие ясного понимания возможности разных геометрических конфигураций искомых объектов, верного описания этих конфигураций и грамотно проведенных вычислений. Такое решение получало максимальную оценку – 3 балла. Если была рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, для которой было получено правильное значение искомой величины, то выпускник получал 2 балла, а если в таком решении была допущена арифметическая ошибка, то задание оценивалось в 1 балл, в других случаях – 0 баллов. Трудность решения заключалось еще и в том, что требовалось применить теоретические сведения о взаимном расположении окружности, вписанной в треугольник и четырехугольник. Многие экзаменуемые просто не знают ключевых теорем, без которых решение невозможно. Судя по результатам, эта задача оказалась наиболее трудной для выпускников.

Основные ошибки:

- анализ только одной конфигурации;

- незнание свойств касательных и четырехугольника, описанного около окружности;

- вычислительные ошибки.

**C5 (2012).** Найдите все значения а, при каждом из которых уравнений

$$a\left|x-5\right| = \frac{2}{x+1}$$

на промежутке $\left[0; +\infty\right)$ имеет более двух корней.

**C5 (2011).** Найдите все значения а, при каждом из которых система

$\begin{cases} (x-4)^2 + (y-4)^2 = 9 \\ y = |x-a| + 1 \end{cases}$ имеет ровно три различных решения.

**C5 (2010).** Найдите все значения $a$, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = 2ax + \left|x^2 - 8x + 7\right|$ меньше 1.

*Тип задания:*

Задача с параметром высокого уровня сложности.

*Характеристика задания:*

Задача на решение системы уравнений с параметром. Это сложная задача, рассчитанная на подготовленного выпускника, который уже пробовал свои силы в подобных задачах. Решение может основываться на разных подходах, требующих хороших способностей и навыков графической интерпретации.

Процент положительных оценок в 2012году – 5,2%, в 2011году – 6%, в 2010 году – 3,12%.

По России: в 2012году – 4,78%, в 2011году – 6,02%, в 2010 году – 2,71%.

Задача с параметром требует уверенного владения материалом и применение нескольких свойств и теорем. Это задание является одним из самых сложных заданий ЕГЭ. Для успешного решения этой задачи важно свободно оперировать с изученными определениями, свойствами, применять их в различных ситуациях, анализировать условие и находить возможные пути решения. Важно уметь решать такие задачи и аналитическим и графическим способом. Очевидно, что это задание по силам выпускникам математических классов, имеющих достаточный опыт решения задач с параметрами.

**C6 (2012).** Моток верёвки режут без остатка на куски длиной не меньше 120 см, но не больше 124 см (назовём такие куски стандартными).

а) Некоторый моток верёвки разрезали на 30 стандартных куска, среди которых есть куски разной длины. На какое наибольшее число одинаковых стандартных кусков можно было бы разрезать тот же моток верёвки?

б) Найдите такое наименьшее число L, что любой моток верёвки, длина которого больше L см, можно разрезать на стандартные куски.

**С6 (2011).** Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 10 раз больше, либо в 10 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 3024.

а) Может ли последовательность состоять из двух членов?

б) Может ли последовательность состоять из трёх членов?

в) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

**С6 (2010).** Каждое из чисел 13, 14, …, 21 умножают на каждое из чисел 1, 2, …, 6 и перед каждым из полученных произведений произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего все 54 полученных результата складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

*Тип задания:*

Задание практической направленности, выявляющее умение связывать реальные ситуации с математическими объектами и их свойствами.

*Характеристика задания:*

Задача практического содержания, связанная с делением с остатком, свойствами чисел, логическим перебором, нахождением наибольших и наименьших значений выражений в целых числах.

Процент положительных оценок в 2012году – 6,2%, в 2011году – 8,7%, в 2010 году – 4,33%.

По России: в 2012году – 4,08%, в 2011году –2,34%, в 2010 году – 4,36%.

Задание С6 высокого уровня сложности было составлено таким образом, что, с одной стороны, тематически оно вполне было доступно всем участникам экзамена, а с другой стороны, для его решения требовалась не столько формальная математическая образованность (знание терминов, формул, правил, готовых алгоритмов), сколько общая математическая культура, т.е. сформированная привычка самостоятельно ориентироваться в математической ситуации, строить и исследовать простые математические модели. Это задание олимпиадное, рассчитанное на сильных выпускников, претендующих на поступление в вузы с высокими требованиями к математической подготовке. Значительный процент участников экзамена не приступали к решению данной задачи. Ниже мы рассмотрим решения наиболее сложных задач и коснемся характерных ошибок.

За всю работу ноль баллов получило в области 72 человека (напротив 61 в 2011 и 157 в 2010 году), такого можно добиться лишь в случаях глубокого протеста, полного непонимания всего в математике ( видимо, не только в ней!) или тяжелого недуга.

0 - 23 балла набрали 861 человек, это 6,07% от общего числа (652 в прошлом году) , такая сумма давалась за 0-4 задачи первой части в 2012 году и за 0-3 задачи первой части в прошлом году. Конечно, некоторые из этих выпускников обнаружили следы обучения, но не более того.

24 - 99 баллов набрали 13313 человек или 93,93% (в 2011 соответственно 9637 человек или 93,7%), что считается достаточным уровнем освоения математики в средней школе.

100 баллов в этом году не набрал никто (в 2011 году таковых было двое).

Согласно анализу результатов ЕГЭ на федеральном уровне, эксперты выделяют 4 уровня подготовки выпускников 2012 года:

I – Низкий (0-6 первичных баллов, 0-28 итоговых) для Кемеровской области это 3011 человек или 21,24% , по России 20,3% ( для 2011 года соответственно было 24,45%, по России -15,6 %). Высокий процент этой группы федеральные эксперты видят в недостаточной ориентации обучения в сторону практических приложений. Кроме того, видимо, костяк этой группы составляют те, для кого экзамен по математике не является профильным.

II – Базовый (7-12 первичных баллов, 32-52 итоговых) для Кемеровской области это 53,26% 7549 чел.), по России 49,3% ( в 2011 году соответственно 55,05% и по России 57,9%) . Выпускники из данной группы успешно освоили курс математики на базовом уровне, не достаточном для продолжения образования по специальностям, требующего повышенного и высокого уровня математической компетенции (технические вузы, физико-математические специальности университетов), однако лучшие из них (44-52 итоговых балла) составляют подгруппу «ближайшего резерва» - это 24,6% для Кемеровской области и 25,8% для России (для 2011 года 22,31% для Кемеровской области и 26,3% для России), члены которой могли бы при определенных условиях освоить предмет на более высоком уровне.

III – Повышенный (от 13 до 22 первичных балла, 56-79 итоговых балла) для Кемеровской области это 24,76% (3510 чел.) и 18,8% для России (в 2011 году соответственно 19,47% и 25,3% для России). Выпускники этой группы представляют хороших абитуриентов для технических вузов, а также на специальность «учитель математики». Их недостаточно для имеющихся вузов, но есть резерв из предыдущего уровня, необходимо создавать условия для их качественного роста.

IV – Высокий (от 23 до 32 первичных балла, более 80 итоговых баллов) для Кемеровской области это 104 человека или 0,73% и 1,0% для России (в 2011 году, это было соответственно 1,2% и 1,3%). Участники ЕГЭ из этой группы – это желаемый контингент физико-математических специальностей ведущих классических университетов и некоторых специальностей технических вузов.

Итого, в Кемеровской области мы имеем чуть более пятой части (21,24%) выпускников с низким уровнем подготовки по математике, существенно больше половины (53,26%) с базовым уровнем подготовки и более половины из них (23,6%) при определенных условиях (в первую очередь при увеличения часов на математику в неделю) могут приобрести математическую компетенцию более высокого уровня, и только четверть выпуска (25,56% ) готова к продолжению образования в вузах с высоким или повышенным уровнем требований по математике, а при создании мер по улучшению математической подготовки для группы «ближайшего резерва» хорошо подготовить удастся 42 - 43 % выпуска.

## 4. Решение наиболее сложных задач одного из вариантов 2012 года

### ОТВЕТЫ

### ЧАСТЬ 1

Задачи первой части варианта 2012 года, приведенные в п.3 настоящих материалов, очень простые, поэтому ограничимся лишь ответами (ответы заданий 2011 года можно найти в сборнике прошлого года):

| B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | B6 | B7 | B8 | B9 | B10 | B11 | B12 | B13 | B14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 7 | 35 | 900 | 5 | 115 | 0,6 | 0,5 | 15 | 0,97 | 4 | 10 | 30 | -8 |

### ЧАСТЬ 2

**C1.**

Ответ: а) $-\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $-\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{6}$; $\frac{11\pi}{6}$.

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах | 2 |
| Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б* | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 2 |

**C2.**

Ответ: $\frac{3\sqrt{13}}{13}$.

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получен верный ответ | 2 |
| Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 2 |

Решение:

1 вариант решения:

При решении задачи методами элементарной математики основная сложность состоит в определении направления нормали к плоскости. Например, из равенства $AD = DB_1$ $DO$ перпендикулярен плоскости $AA_1B_1B$ и лежит в плоскости $ADB_1$, где точка $O$ - середина $AB_1$, следовательно нормаль к плоскости $ADB_1$ параллельна плоскости $AA_1B_1B$ и перпендикулярна диагонали $AB_1$, после параллельного переноса грани $AA_1B_1B$ в точку C искомая величина найдется как расстояние от середины $C_0$ $AB$ до диагонали $AB_1$: $h = \dfrac{2S_{\Delta AOC_0}}{AO} = \dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{13}}{2}} = \dfrac{3\sqrt{13}}{13}$.

2 вариант решения:

Вектор нормали к плоскости можно найти после введения декартовой системы координат и составления уравнения плоскости: например, A(0;0;0), B(2;0;0), $B_1(2;0;3)$, $D(1;\sqrt{3};0)$,

$$0 = (x;y;z)\cdot((2;0;3)\times(1;\sqrt{3};3/2)) = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & \sqrt{3} & 3/2 \end{vmatrix} = -3\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}z, \quad \vec{N} = (-3;0;2), h = \left|\vec{CD}\cdot\vec{N}/\left|\vec{N}\right|\right| = \frac{3}{\sqrt{13}}.$$

Нет слов, этот метод аналитической геометрии эффективен и не требует напряжения воображения (куда там направлен вектор нормали ?). Цель задания все-таки - проверить качество собственного мышления выпускника, а здесь оно скрыто в формулах, это все равно, что норматив по бегу сдать сидя за рулем автомобиля. Конечно, навык есть, но он другой - на применение формул. Оценка, разумеется не снижается, но осадок остается.

Замечание: можно начать рассмотрение как в первом методе, а вектор нормали находить векторным способом, вводя координаты в плоскости грани:

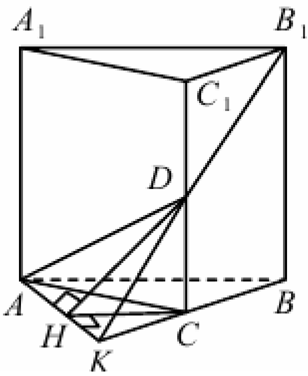
$$0 = \vec{N} \cdot A\vec{B}_1 = 2N_x + 3N_y \Rightarrow \quad \vec{N} = (-3;2).$$

3 вариант решения (из критерия):

Решение.

Прямая $B_1D$ пересекает прямую $BC$ в точке $K$. Плоскости $ABC$ и $ADB_1$ пересекаются по прямой $AK$.

Из точки $D$ опустим перпендикуляр $DH$ на прямую $AK$, тогда отрезок $CH$ (проекция $DH$) перпендикулярен прямой $AK$. Прямая $AK$ перпендикулярна плоскости $CDH$, следовательно, плоскости $ADB_1$ и $CDH$ перпендикулярны. Высота $CM$ треугольника $CDH$ перпендикулярна плоскости $ADB_1$, следовательно, $CM$ — расстояние от точки $C$ до плоскости $ADB_1$.




Точка $D$ — середина ребра $CC_1$, поэтому $CD = DC_1 = \frac{3}{2}$.

Из равенства треугольников $B_1C_1D$ и $KCD$ получаем:

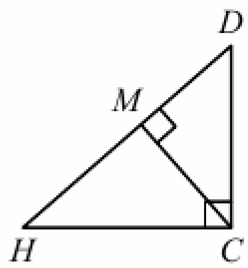
$$CK = B_1C_1 = 2.$$

В равнобедренном треугольнике $ACK$ угол $C$ равен $120°$, $AC = CK = 2$, высота $CH$ является биссектрисой, откуда

$$CH = AC \cdot \cos 60° = 1.$$

В прямоугольном треугольнике $CDH$ с прямым углом $C$: $CD = \frac{3}{2}$; $CH = 1$; $DH = \sqrt{CD^2 + CH^2} = \frac{\sqrt{13}}{2}$, откуда высота

$$CM = \frac{CD \cdot CH}{DH} = \frac{3\sqrt{13}}{13}.$$




Ответ: $\frac{3\sqrt{13}}{13}$.

Замечание: Можно сделать построения как в последнем методе и высоту найтичерез объем пирамиды и площади граней.

По результатам эта задача оказалась почти самой сложной, наряду с С5. Много было работ с неверным проведением перпендикуляра, немного - с вычислитеьными ошибками, то есть самая расространенная ошибка в изначальной идеи о направленности нормали.

**С3.** Задача чисто техническая.

$$\text{Ответ: } \left(0; \frac{1}{25}\right); \left[1; 1+\log_4 3\right].$$

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получен верный ответ | 3 |
| Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах системы неравенств | 2 |
| Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве системы неравенств | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 3 |

**С4.**

Ответ: 6 или $\frac{255}{49}$.

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ | 3 |
| Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины | 2 |
| Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 3 |

Не очень сложная задача, но к геометрии у выпускников традиционная боязнь, поэтому результат не очень высокий.

1 метод решения (из критерия):

Рассмотрим равнобедренный треугольник $ABC$, в котором $\sin\angle ABC = \frac{8}{17}$, $BC = 60$, $AB = AC$. Пусть $AH$ — высота треугольника $ABC$. Тогда $H$ — середина $BC$. Обозначим $\angle ABC = \angle ACB = \alpha < 90^\circ$. Тогда

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{8}{17}\right)^2} = \frac{15}{17};\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{8}{15};$$

$$AB = \frac{BH}{\cos\alpha} = 34.$$

Предположим, что окружность радиуса $r$ с центром $O_1$ вписана в угол $ACB$ и касается основания $BC$ в точке $N$, а окружность того же радиуса с центром $O_2$ вписана в угол $ABC$, касается основания $BC$ в точке $M$, а первой окружности — в точке $D$ (рис. 1).

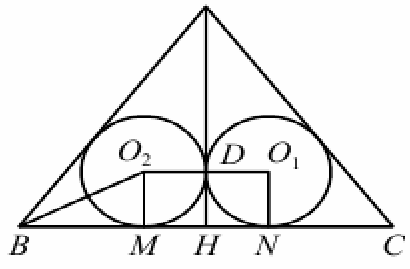



Рис. 1

Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, поэтому

$$\angle O_2BM = \frac{\alpha}{2};\ \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1}{4}.$$

Из прямоугольного треугольника $BMO_2$ находим:

$$BM = O_2M \cdot \operatorname{ctg}\angle MBO_2 = r \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = 4r.$$

Тогда $CN = BM = 4r$.

Линия центров касающихся окружностей проходит через точку их касания, поэтому $O_1O_2 = 2r$, значит, $MN = O_1O_2 = 2r$, поскольку $O_1O_2MN$ — прямоугольник. Следовательно,

$$60 = BC = BM + MN + CN = 4r + 2r + 4r = 10r,$$

откуда находим $r = 6$.

Пусть теперь окружность радиуса $r$ с центром $O_1$ вписана в угол $BAC$ и касается боковой стороны $AB$ в точке $P$, вторая окружность радиуса $r$ с центром $O_2$ вписана в угол $ABC$, касается боковой стороны $AB$ в точке $Q$, а также касается первой окружности (рис. 2).

Из прямоугольных треугольников $APO_1$ и $BQO_2$ находим:

$$AP = O_1P \cdot \operatorname{ctg}\angle PAO_1 = r \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{8}{15}r,$$

$$BQ = O_2Q \cdot \operatorname{ctg}\angle QBO_2 = r \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = 4r.$$

Следовательно,

$$34 = AB = AP + PQ + QB = AP + O_1O_2 + QB =$$
$$= \frac{8}{15}r + 2r + 4r = \frac{98}{15}r,$$

откуда находим $r = \frac{255}{49}$.

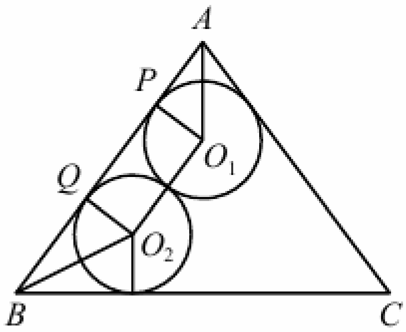


Рис. 2

В случае, когда окружности вписаны в углы $BAC$ и $ACB$, получим тот же результат.

2 метод решения :

Проведем внутри треугольника линии параллельные сторонам, отстоящие от них на одном и том же расстоянии r. Внутри получится треугольник подобный исходному. Его вершины обозначим соответственно $O_A, O_B, O_C$ – вершины, наиболее близкие к соответствующей вершине исходного треугольника.

Остальные построения и обозначения сохраним как в предыдущем методе (Рис.1, Рис.2). Как и в предыдущем методе

$\cos\alpha = \frac{15}{17},\ tg\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4}.$ Тогда в первой конфигурации

$2r = O_B O_C = 60 - \dfrac{2r}{tg\dfrac{\alpha}{2}} \Rightarrow r = \dfrac{60}{10} = 6\cdot$ Затем $AB = \dfrac{30}{\cos\alpha} = 34$ и из подобия треугольников в случае второй конфигурации получим $\dfrac{2r}{34} = \dfrac{60-8r}{60} \Rightarrow r = \dfrac{17\cdot 15}{34+15} = \dfrac{255}{49}\cdot$

**С5**.

Задача достаточно сложная, но тематика уже не новая. Решение таких задач требует вдумчивой систематической работы над задачами, осмыслением методов, а более точно идейной стороны этих методов, поскольку почти каждая задача имеет свою особенность.

1 способ решения:

Функция $y = g(x) \equiv \dfrac{2}{x+1} > 0$, при $x \geq 0$ и $g(0) = 2$ следовательно $a > 0$, тогда график функции $y = a|x-5|$ - есть «уголок» с вершиной в точке (5;0) и ветками-лучами, направленными вверх с угловыми коэффициентами $k = \pm a$. Правый луч при всегда пересекает график гиперболы $y = g(x)$ в одной точке при $x > 5.$ Левый луч может иметь одну точку пересечения с графиком гиперболы при $a = a_0$ ( в этом случае луч касается графика гиперболы), либо две точки пересечения, когда $-\dfrac{2}{5} \leq k < a_0$ (левое неравенство означает, что данный луч проходит не выше верхней точки графика гиперболы (0;2)). Найдем $a_0$ из условия, что при $a > 0$ уравнение $\dfrac{2}{x+1} = -a(x-5) \Leftrightarrow x^2 - 4x + \dfrac{2-5a}{a} = 0$ имеет одно решение, то есть соответствует случаю $D = 16 - \dfrac{4(2-5a)}{a} = 0$ или $a_0 = \dfrac{2}{9}$, $x = 2 > 0$ в итоге получаем $\dfrac{2}{9} < a \leq \dfrac{2}{5}$.

2 способ решения (из критерия):

Рассмотрим функции $f(x)=a|x-5|$ и $g(x)=\frac{2}{x+1}$. Исследуем уравнение $f(x)=g(x)$ на промежутке $[0;+\infty)$.

При $a\le 0$ все значения функции $f(x)$ на промежутке $[0;+\infty)$ неположительны, а все значения функции $g(x)$ — положительны, поэтому при $a\le 0$ уравнение $f(x)=g(x)$ не имеет решений на промежутке $[0;+\infty)$.

При $a>0$ функция $f(x)$ возрастает на промежутке $(5;+\infty)$. Функция $g(x)$ убывает на этом промежутке, поэтому уравнение $f(x)=g(x)$ всегда имеет ровно одно решение на промежутке $(5;+\infty)$, поскольку $f(5)<g(5)$ и $f\left(5+\frac{1}{a}\right)>g\left(5+\frac{1}{a}\right)$.

На промежутке $[0;5]$ уравнение $f(x)=g(x)$ принимает вид $5a-ax=\frac{2}{x+1}$. Это уравнение сводится к уравнению $ax^2-4ax+(2-5a)=0$. Будем считать, что $a>0$, поскольку случай $a\le 0$ был рассмотрен ранее. Дискриминант квадратного уравнения $D=16a^2-4a(2-5a)=36a^2-8a$, поэтому при $0<a<\frac{2}{9}$ это уравнение не имеет корней; при $a=\frac{2}{9}$ уравнение имеет единственный корень, равный $2$; при $a>\frac{2}{9}$ уравнение имеет два корня.

Пусть уравнение имеет два корня, то есть $a>\frac{2}{9}$. Тогда оба корня меньше 5, поскольку при $x\ge 5$ значения функции $5a-ax$ неположительны, а значения функции $\frac{2}{x+1}$ положительны. По теореме Виета сумма корней равна 4, а произведение равно $\frac{2}{a}-5$. Значит, больший корень всегда принадлежит промежутку $[0;5]$, а меньший принадлежит этому промежутку тогда и только тогда, когда $\frac{2}{a}-5\ge 0$, то есть $a\le\frac{2}{5}$.

Таким образом, уравнение $\frac{2}{x+1}=a|x-5|$ имеет следующее количество корней на промежутке $[0;+\infty)$:

- нет корней при $a\le 0$;
- один корень при $0<a<\frac{2}{9}$;
- два корня при $a=\frac{2}{9}$ и $a>\frac{2}{5}$;
- три корня при $\frac{2}{9}<a\le\frac{2}{5}$.

C**6.**

Ответ: а) 30; б) 3600.

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты | 4 |
| Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов | 3 |
| Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов | 2 |
| Верно получен один из следующих результатов:<br>— искомая оценка в п. *а*;<br>— пример в п. *а*, обеспечивающий точность предыдущей оценки;<br>— искомая оценка в п. *б*;<br>— пример в п. *б*, обеспечивающий точность предыдущей оценки | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 4 |

Задача не сколько сложная, сколько необычная. Решалась выпускниками тяжело, было много непониманий по тексту, заметно, что таких нестандартных задач им встречалось немного, в этом и смысл – проверить на что каждый способен.

1 способ решения:

Длины стандартных отрезков веревки удовлетворяют соотношениям: $L_i = 120 + r_i,\ r_i \in [0;4],\ i = 1,2...\ \ n.$ В случае а) $n = 30.$ Их общая длина $L = 120\cdot 30 + r_1 + r_2 + .... + r_{30} \le 3600 + 4\cdot 30 = 120\cdot 31,$ при этом равенство достигается в случае, когда все отрезки максимальны и равны 124 см. Значит эту веревку нельзя разрезать даже на 31 равный стандартный отрезок – не хватает длины. Следовательно в части а) ответ 30.

Для задачи в) любой отрезок веревки можно разрезать на сколько-то кусков самой малой длины и получить остаток, от которого уже нельзя отрезать даже самый малый кусок длины 120, то есть $L = 120\cdot n + r < 120\cdot n + 120,$ теперь этот остаток $r < 120$ разделить на $n$ частей и добавить к ним эти части, для того чтобы они были в итоге стандартной длины необходимо, чтобы $\frac{r}{n} \le 4$, но $r$ может быть сколь угодно близко к 120, а $\frac{r}{n}$ будет сколь угодно к 4, то есть $n = 30$ и $L_{\min} = 120 \cdot 30$. Действительно, если $L \geq L_{\min}$, то при делении его на куски по 120 см. получиться $n \geq 30$, и тогда $\frac{r}{n} < 4$ и можно разбить этот кусок веревки на равные куски длиной $120 + \frac{r}{n} < 124$. Если кусок веревки чуть меньше $120 \cdot 30 - \varepsilon$, где $0 < \varepsilon \leq 1$, например.

Тогда $L = 120 \cdot 29 + 120 - \varepsilon$, но тогда $\frac{120 - \varepsilon}{29} \geq \frac{119}{29} > 4$ и этот кусок нельзя разрезать на 29 равных отрезка стандартной длины (они будут больше), ну и тем более этот же кусок веревки и подавно нельзя разрезать на меньшее число стандартных отрезков. Итого: $L_{\min} = 120 \cdot 30$.

2 способ решения (по критериям):

Решение каждого пункта состоит из двух частей: оценка и пример.

Рассмотрим моток верёвки длиной $x$ см. Условие того, что его можно разрезать на $n$ стандартных кусков, записывается в виде $120n \leq x \leq 124n$ или $120 \leq \frac{x}{n} \leq 124$.

а) В данном случае имеем $120 \cdot 30 < x < 124 \cdot 30$ (неравенства строгие, поскольку среди кусков есть неравные). Пусть эту верёвку можно разрезать на $n$ стандартных кусков, тогда $120 \leq \frac{x}{n} \leq 124$. При $n \geq 31$ получаем $\frac{x}{n} \leq \frac{x}{31} < \frac{124 \cdot 30}{31} = 120$, то есть этот моток верёвки нельзя разрезать больше чем на 30 стандартных кусков.

При $n=30$ получаем $120<\frac{x}{30}<124$. Значит, эту верёвку можно разрезать на 30 одинаковых стандартных кусков, но нельзя разрезать на большее количество стандартных кусков.

б) Отрезки $[120n;124n]$ и $[120(n+1);124(n+1)]$, являющиеся решениями неравенств $120n\le x\le 124n$ и $120(n+1)\le x\le 124(n+1)$, имеют общие точки для всех $n$, при которых $120(n+1)\le 124n$, то есть при $n\ge 30$. Значит, любую верёвку длиной $120\cdot 30=3600$ см или более можно разрезать на стандартные куски.

Докажем, что верёвку, длина которой $x$ см больше $124\cdot 29=3596$ см, но меньше $120\cdot 30=3600$ см, нельзя разрезать на $n$ стандартных кусков ни для какого $n$. При $n\ge 30$ получаем $x<120\cdot 30\le 120n$, что противоречит условию $120n\le x$. При $n\le 29$ получаем $x>124\cdot 29\ge 124n$, что противоречит условию $x\le 124n$. Таким образом, искомое число равно 3600.

## 5. Общие выводы и рекомендации

Подводя итоги участия выпускников 2012 года области в ЕГЭ по математике можно констатировать:

1. 93,9% участников ЕГЭ справились с экзаменом по математике.

2. Результаты ЕГЭ 2012г. показали, что около 53% участников экзамена в основном овладевают всеми контролируемыми элементами содержания на базовом уровне. Лишь 25% участников ЕГЭ демонстрируют высокий уровень подготовки, позволяющий обеспечить успешность обучения в вузе на специальностях с повышенными требованиями по математике. Очень высокий уровень показали 0,73% (104 чел.).

3. Показатели результативности ЕГЭ выпускников сельских образовательных учреждений почти не отличаются от результатов выпускников городских общеобразовательных учреждений. Но выпускники, которые получили наивысшие баллы за экзамен, являются представителями городских школ.

4. Выпускники общеобразовательных учреждений демонстрируют неплохие результаты выполнения заданий по содержательным блокам «Практико-ориентированные задачи», «Геометрия», «Алгебра» Однако 20% выпускников испытывают затруднения в решении задач из блока «Функции и начала математического анализа». Отмечаемые из года в год одни и те же проблемы,

свидетельствуют о недостаточном внимании, уделяемом формированию умения исследования функций при изучении курса алгебры и начал анализа. Сохраняются проблемы с заданиями на производную и е□ приложения, с исследованием функции на наибольшее – наименьшее значение функции на отрезке.

Общий подход к ЕГЭ в 2013 году сохраняется, также сохраняется общее число заданий - **14 с** общим числом первичных баллов **32**, вышел демонстрационный вариант 2013 года, формируется Открытый банк заданий ЕГЭ по первой части. Главная задача открытого банка заданий ЕГЭ по математике — дать представление о том, какие задания будут в вариантах Единого государственного экзамена по математике в 2013 году, и помочь выпускникам сориентироваться при подготовке к экзамену.

Работать с открытым банком можно самостоятельно или под руководством учителя. Разумно «прицельную» (позадачную) подготовку к экзамену сочетать с систематическим повторением курса математики основной и старшей школы, используя те учебники и задачники, по которым школьники учились. Такая стратегия позволит успешно подготовиться к экзамену.

Полезно время от времени проходить пробное тестирование, оно всегда доступно в Интернете, например: http://www.resolventa.ru/demo/training.htm

Кроме этого, имеется большое число сайтов с полезной для подготовки к ЕГЭ литературой и вариантами заданий, см., например:

http://www.mathege.ru:8080/or/ege/Main

http://www.alleng.ru/